Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

Penerapan Persamaan Aljabar Riccati Pada Masalah Kendali Dengan Waktu Tak Berhingga

Nilwan Andiraja[1], Zulfikar[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian sebelumnya yang membahas tentang bagaimana aplikasi persamaan aljabar Riccati untuk menyelesaikan masalah kendali waktu tak berhingga untuk satu kendali. Oleh karena itu pada penelitian ini dibentuk persamaan diferensial dinamik dua kendali dan fungsi tujuan yang akan diminimalkan untuk dua kendali pada waktu tak berhingga. Kemudian berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan dibentuk persamaan Hamilton untuk masing-masing kendali berdasarkan vektor kendali lain yang diketahui. Selanjutnya dari persamaan Hamiltonian dibentuk persamaan *state*, persamaan *costate*, dan persamaan stasioner. Selanjutnya dari persamaan *state* dan *costate* dibentuk persamaan aljabar Riccati untuk kendali pertama dan kendali kedua. Kemudian dianalisa syarat agar persamaan aljabar Riccati memiliki solusi. Akhirnya diperoleh hasil bahwa jika persamaan aljabar Riccati memiliki solusi maka akan terdapat vektor kendali satu dan dua untuk persamaan diferensial dinamik.

Kata Kunci: Kendali, Dinamik, Riccati, Hamilton, Tak berhingga.

ABSTRACT

This research is development from previously research was discuss about how the application of algebraic Riccati equation to solve the *control problem of infinite time for one control. Therefore in this research we make diferential equation dynamic for two control and objective function to minimize for two control. Then based on diferential dynamic equation and objective function we make Hamilton equation for each control based on other vector control. Then from Hamiltonian equations we make state equations, costate equations and stasionary equations. Moreover from state and costate we made algebraic Riccati equations for first control and second control. Then we analyze condition so that algebraic Riccati equations have solutions. Finaly we get solution if algebraic Riccati equations have solutions so that will exist first and second control vector for diferential dynamic equations.*

Keywords: *Control, Dynamic, Riccati, Hamilton, Infinite.*

Pendahuluan

Persamaan diferensial Riccati menjadi representasi matematis yang berasal dari persoalan-persoalan teknik, rekayasa dan sains terapan. Persamaan diferensial Riccati merupakan salah satu persamaan orde satu pada persamaan diferensial biasa. Dari persamaan diferensial Riccati untuk waktu tak berhingga maka dibentuk persamaan aljabar Riccati. Persamaan aljabar Riccati selain digunakan pada persamaan diferensial biasa juga digunakan pada teori kendali.

Teori kendali merupakan fungsi yang menjelaskan tentang masalah kendali pada sistem yang akan menghasilkan tanggapan sistem yang diharapkan. Kendali optimal mempunyai tujuan untuk mendapatkan vektor kendali yang mengoptimalkan sistem dinamik. Untuk mendapatkan vektor kendali yang diharapkan cara yang akan dilakukan yaitu dengan membentuk terlebih dahulu persamaan Hamilton. Dari persamaan Hamilton dan fungsi dinamik, kendali yang diketahui dibentuk persamaan aljabar Riccati. Persamaan aljabar Riccati yang terbentuk digunakan untuk membentuk fungsi yang diinginkan.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

Pada penelitian terdahulu, telah dijelaskan oleh Musthafa (2011) dalam jurnalnya yang berjudul “Karakteristik Persamaan Aljabar Riccati dan Penerapannya pada Masalah Kendali” tentang peran penting persamaan aljabar Riccati dalam berbagai masalah kendali. Pembahasan pada jurnal tersebut dimulai dari sebuah persamaan diferensial linier dinamik untuk satu kendali dan sebuah persamaan fungsi tujuan untuk satu kendali. Kemudian berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan tersebut dibentuk persamaan Hamilton. Selanjutnya berdasarkan persamaan Hamilton tersebut dibentuk persamaan *state*, persamaan *costate* dan persamaan stasioner. Berdasarkan persmaan *state* dan *costate* dibentuk persamaan aljabar Riccati. Dari uraian tersebut diperoleh bahwa penelitian yang dilakukan oleh Mustafa (2011) belum membahas peranan persamaan aljabar Riccati pada kasus sistem dinamik untuk dua kendali untuk lingkar tertutup. Oleh karena itu penulis tertarik untuk membahas bagaimana penerapan persamaan aljabar Riccati untuk menyelesaikan masalah sistem dinamik dua kendali untuk waktu tak berhingga.

Bahan dan Metode Penelitian

Adapun metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diketahui fungsi dinamik sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u_1}(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t)$$

   Dengan matriks $A \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \epsilon \mathbb{R}^{n\times m}$ untuk *i*=1,2, dan vektor $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u_i}(t) \in \mathbb{R}^m$, untuk *i*=1,2. Adapun fungsi tujuannya sebagai berikut:

$$J_i(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\boldsymbol{x}^T Q_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i \boldsymbol{u_i}\right) dt$$

Dengan matriks $R_i \epsilon \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_i \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$ untuk *i*=1,2.

2. Dibentuk persamaan Hamilton, persamaan *State*, persamaan *costate*, persamaan stasioner berdasarkan langkah 1 diatas.
3. Dibentuk matriks Hamiltonian $\begin{bmatrix} A & -BR_i^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ dari langkah dua dan didefinisikan $\boldsymbol{\lambda}(t) = K_i(t)\boldsymbol{x}(t)$ dimana $K_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, untuk *i*=1,2.
4. Kemudian dibentuk persamaan aljabar Riccati untuk tiap kasus kendali.
5. Dianalisa solusi dari persamaan aljabar Riccati untuk membentuk vektor kendali.
6. Dibentuk vektor kendali..

Bahan-bahan penunjang untuk pembahasan, diberikan dibawah ini :

1. Persamaan Aljabar Riccati

Pada masalah kendali optimal kuadratik, salah satu persamaan yang cukup penting dalam membahas kendali optimal kuadratik adalah persamaan aljabar Riccati. Persamaan aljabar Riccati dinyatakan sebagai berikut:

$$A^TX + XA + XRX + Q = 0 \tag{1}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} I & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

dengan matriks $A \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $R \epsilon \mathbb{R}^{m\times m}$ adalah matriks simetris.

Persamaan aljabar Riccati memiliki solusi jika dan hanya jika terdapat matriks $\Lambda \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$ sehingga:

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ I \end{bmatrix}\Lambda \tag{3}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari persamaan diatas dengan matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}\Lambda \tag{4}$$

atau solusi X dari persamaan aljabar Riccati dapat diperoleh dengan mempertimbangkan subruang invariant dari matriks:

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

2. Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu.

Persamaan umum kendali optimal waktu kontinu untuk sistem dinamis untuk waktu *t* yaitu,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t). \tag{5}$$

$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah vektor kendali *input*. Sedangkan fungsi tujuan yang ingin dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan

$$J_i(t_0) = \int_{t_0}^{T_f}\left(\boldsymbol{x}^T Q_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i \boldsymbol{u}_i\right)dt \tag{6}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir dengan $T_f \to \infty$.

Selanjutnya, perlu didefinisikan persamaan-persamaan berikut untuk proses meminimalkan fungsi objektif dalam mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu.

Persamaan Hamilton : $H(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (7)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}.$ (8)

Persamaan *costate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}$
(9)

Persamaan stasioner : $\boldsymbol{0} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = R\boldsymbol{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}$
(10)

Berdasarkan persamaan (10) maka diperoleh vektor kendali yaitu $\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t)$, dengan didefinisikan pengali lagrange yaitu $\boldsymbol{\lambda}(t) = K\ \ (t)\boldsymbol{x}(t)$ dimana $K\ \ (t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas penyelesaian masalah dinamis untuk waktu tak berhingga. Oleh karena itu, diberikan persamaan diferensial fungsi dinamik dua kendali

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0 \tag{11}$$

dengan fungsi tujuan yaitu

$$J_i(x_0, \boldsymbol{u}_i,) = \int_{t_0}^{\infty}\{\boldsymbol{x}^T Q_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i \boldsymbol{u}_i\}dt, \quad i = 1,2 \tag{12}$$

pada bagian ini akan dibahas kasus untuk waktu tak berhingga.

Selanjutnya akan ditentukan vektor kendali pertama dengan diketahui kendali kedua yaitu

$$\boldsymbol{u}_2 = -R_2^{-1}B_2^T K_2 \boldsymbol{x} \tag{13}$$

dengan mensubstitusikan vektor kendali (13) ke persamaan (11) maka diperoleh,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_2 R_2^{-1} B_2^T K_2)\boldsymbol{x}(t) + B_1 \boldsymbol{u}_1 \tag{14}$$

Selanjutnya dibentuk persamaan Hamilton, persamaan *state*, persamaan *costate* dan persamaan stasioner. Persamaan costate yaitu

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q_1 \boldsymbol{x} + (A - B_2 R_2^{-1} B_2^T K_2)^T \boldsymbol{\lambda} \tag{15}$$

Dan persamaan stasioner yaitu

$$0 = R_1 u_1 + B_1^T \boldsymbol{\lambda} \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (16) diperoleh $\boldsymbol{u}_1^* = -R_1^{-1} B_1^T \boldsymbol{\lambda}$
Selanjutnya dari persamaan (12) dan (13) lalu dibentuk vektor kendali pertama dari persamaan sehingga diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_2^{-1} B_2^T K_2)\boldsymbol{x} - B_1 R_1^{-1} B_1^T \boldsymbol{\lambda} \tag{17}$$

Sementara itu dari persamaan costate dan persamaan (17) diperoleh sistem homogen Hamilton

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2 R_2^{-1} B_2^T K_2 & -B_1 R_1^{-1} B_1^T \\ -Q_1 & -(A - B_2^{-1} B_2^T K_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Selanjutnya didefinisikan $\boldsymbol{\lambda} = K_1 \boldsymbol{x}$, kemudian dideferensialkan yaitu $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{K}_1 \boldsymbol{x} + K_1 \dot{\boldsymbol{x}}$. Maka berdasarkan persamaan (17) dan persamaan *costate* diperoleh persamaan aljabar Riccati untuk kendali pertama sebagai berikut,

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1 (A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - Q_1 \text{ dengan } S_i = B_i R_i^{-1} B_i^T, i = 1,2 \tag{19}$$

Jika persamaan (19) memiliki solusi K_1 , maka dapat dibentuk vektor kendali pertama yang optimal yaitu

$$\boldsymbol{u}_1^* = -R_1^{-1} B_1^T K_1 \boldsymbol{x}$$

Selanjutnya, untuk menentukan vektor kendali kedua, dilakukan proses yang sama seperti pada menentukan kendali pertama. Pertama diketahui terlebih dahulu vektor kendali pertama, sehingga diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_1 R_1^{-1} B_1^T K_1)\boldsymbol{x}(t) + B_2 \boldsymbol{u}_2 \tag{20}$$

Berdasarkan persamaan (20) dan fungsi tujuan untuk kasus kendali kedua, dibentuk persamaan Hamilton, persamaan *state*, persamaan *costate* dan persamaan stasioner. Sehingga dapat dibentuk sistem homogen Hamilton

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_1 R_1^{-1} B_1^T K_1 & -B_2 R_2^{-1} B_2^T \\ -Q_2 & -(A - B_1^{-1} B_1^T K_1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Dengan didefinisikan $\boldsymbol{\lambda} = K_2 \boldsymbol{x}$ maka diperoleh persamaan aljabar Riccati sebagai berikut,

$$0 \quad = -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_1(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_1 \tag{22}$$

Jika persamaan (22) memiliki solusi K_2 , maka dapat diperoleh vektor kendali kedua yaitu

$$\boldsymbol{u}_2^* = -R_2^{-1}B_2^T K_2 \boldsymbol{x}$$

Contoh :

Diberikan matriks sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = R_2 = 1$$

Diketahui persamaan diferensial dinamik sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{u}_1 + B_2\boldsymbol{u}_2 \tag{23}$$

dengan fungsi tujuan:

$$J_i = \int_0^\infty \left\{ \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T (1) \boldsymbol{u}_i \right\} dt.\; i = 1{,}2 \tag{24}$$

Akan dicari vektor kendali u_1 dan u_2

Penyelesaian :

Akan ditentukan terlebih dahulu vektor kendali pertama dengan iketahui vektor kendali kedua. Sehingga diperoleh persamaan diferensial dinamik yaitu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \tag{25}$$

Dengan fungsi tujuan

$$J(t_0) = \int_0^\infty \left\{ \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_1^T (1) \boldsymbol{u}_1 \right\} dt \tag{26}$$

Berdasarkan persamaan (25) dan (26) dapat dibentuk persamaan Hamilton, *state*, *costate* dan persamaan stasioner. Selanjutnya dari persamaan stasioner diperoleh

$$\boldsymbol{u}_1 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\lambda} \tag{27}$$

Dari persamaan *state* dan *costate* dapat dibentuk sistem homogen Hamilton yaitu

$$H = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \tag{28}$$

Kemudian dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati untuk $T_f \to \infty$ yaitu

$$0 = -K_1 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} K_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T K_1 \tag{29}$$

Selanjutnya untuk menentukan solusi persamaan (29) ditentukan nilai eigen dari matrik H pada persamaan (28) yaitu {1,3,-1,-3} dan vektor eigennya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_{-1}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_{-3}=\begin{bmatrix}2\\3\\12\\0\end{bmatrix}$$

Dari vektor eigen tersebut, maka dapat diperoleh solusi untuk K_1 sebanyak 6 yaitu

1. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{1,}\boldsymbol{v}_3\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{1,\})$
2. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{1,}\boldsymbol{v}_{-1}\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&4\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&0\\-4&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{1,1\}$
3. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{1,}\boldsymbol{v}_{-3}\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&12\\0&0\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}-6&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{-5.1\}$
4. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{-1,}\boldsymbol{v}_{-1}\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&0\\4&0\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{1,5\}$
5. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{-1,}\boldsymbol{v}_{-3}\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&12\\2&0\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}24&12\\-2&4\end{bmatrix}$,

   $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{15+2\sqrt{19},15-2\sqrt{19}\}$
6. Rentang $\{\boldsymbol{v}_{3,}\boldsymbol{v}_{-3}\}\coloneqq\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$, kemudian $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&12\\0&0\end{bmatrix}$

   maka diperoleh: $K_1\coloneqq\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}(A+RK_1)=\{0,1\}$

Masing-masing solusi K_1 diatas digunakan untuk menentukan solusi untuk persamaan alajabr Riccati pada kendali kedua.

Kemudian dari keenam solusi K_1 diperoleh bahwa untuk $K_1=\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}$ menghasilkan persamaan aljabar Riccati untuk kendali kedua yaitu

$$0\ =-K_2\begin{bmatrix}1&-4\\0&-3\end{bmatrix}+K_2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}K_2-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-4\\0&-3\end{bmatrix}^T K_2 \tag{30}$$

Dengan matriks Hamilton yaitu

$$H=\begin{bmatrix}1&-4&-1&0\\0&-3&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&4&3\end{bmatrix} \tag{31}$$

Dari matriks H pada persamaan (30) nilai eigen yaitu {1,-1,3,-3} dan vektor eigennya sebagai berikut,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_{-1} = \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_{-3} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dari vektor eigen tersebut, maka diperoleh solusi untuk persamaan aljabar Riccati (30) yaitu $K_2 = \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}$. Sehingga berdasarkan solusi K_1dan K_2 , maka diperoleh fungsi kendali pertama yaitu $\boldsymbol{u}_1 = [0\ \ -4]\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{u}_2 = [-2\ \ \ 0]\boldsymbol{x}$. selanjutnya dengan mensubtitusikan vektor kendali pertama dan kedua ke persamaan diferensial dinamik (25) maka diperoleh,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix}-1 & -4\\0 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad (32)$$

Oleh karena kedua nilai eigen untuk persamaan (31) bernilai negatif, maka kedua vektor kendali dapat menstabilkan sistem dinamik.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dari penyelesaian masalah kendali waktu tak berhinnga dengan dua kendali, maka didapat kesimpulan untuk fungsi dinamik

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1 + B_2\boldsymbol{u}_2$$

dan fungsi tujuan

$$J_i(t) = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T Q_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i \boldsymbol{u}_i\} dt, \qquad i = 1,2$$

didapat persamaan aljabar Riccatinya

$$\begin{aligned} 0 \quad &= -(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 \\ 0 \quad &= -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 \end{aligned}$$

untuk kendali pertama dan kedua.

Dari persamaan aljabar Riccati dapat dibentuk matriks Hamilton, persamaan aljabar Riccati memiliki solusi jika dan hanya jika matriks Hamilton memiliki nilai eigen. Jika persamaan aljabar Riccati memiliki solusi K_i untuk $i = 1, 2$. Maka vektor kendali $\boldsymbol{u}_i = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i \boldsymbol{x}$, $i = 1, 2$. Oleh karena itu dapat di tulis bahwa persamaan aljabar Riccati memiliki peranan yang penting dalam membentuk vektor kendali, karena jika tidak terdapat solusi persamaan aljabar Riccati maka vektor kendali masih berbentuk $\boldsymbol{u}_i^* = -R_i^{-1}B_i^T\boldsymbol{\lambda}$, untuk i=1,2, yang masih mengandung pengali lagrange.

Daftar Pustaka

[1] Engwerda, Jacob. 2005,.LQ Dynamic Optimization and Differential Games. John Wiley & Sons. Chiceter.
[2] Lewis, F.L and Vassilis L. Syrmos. 1995. Optimal Control. John Wiley & Sons. Toronto. Kanada.
[3] Musthofa, M.W. 2011. Karakteristik Persamaan Aljabar Riccati dan Penerapannya Pada Masalah Kendali. prosiding Seminar Nasional Penelitian UNY. Yogyakarta.
[4] Ogata, Katsuhiko. 1995. Discrete Time Control System. New Jersey : Prentice-Hall, Inc.
[5] Zhou, K., J.C. Doyle. 1998. Essentials of Robust Control. Prentice-Hall International. New Jersey.
[6] Zhou, K., J.C. Doyle and K, Glover. 1998. Robust Optimal Control. Prentice-Hall International. New Jersey.