Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

# Persamaan Differensial Parsial Gelombang Homogen Pada Selang $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$ Dengan Syarat Batas Dirichlet Dan Neumann

**Rukmono Budi Utomo**
Universitas Muhammadiyah Tangerang
Email 1: rukmono.budi.u@mail.ugm.ac.id
Email 2: rukmono.budi.u@students.itb.ac.id

**ABSTRAK**

Tulisan ini mengkaji tentang Persamaan Differensial Parsial (PDP) Gelombang Homogen pada selang $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$ dengan kondisi syarat batas Dirichlet dan Neumann. Penelitian dilakukan dengan memahami terlebih dahulu mengenai bentuk umum PDP orde dua, transformasi koordinat, bentuk kanonik PDP linier orde dua, serta bentuk Persamaan Differensial Parsial Gelombang homogen tanpa syarat batas sertamencari solusi penyelesaiannya. Setelah itu penelitian dilakukan dengan mengenalkan bentuk umum PDP Gelombang Homogen dengan syarat batas Dirichlet dan Neumann beserta penyelesaiannya. Dalam tulisan ini juga disertakan contoh penerapan dari PDP Gelombang homogen untuk kedua jenis syarat batas tersebut beserta analisisnya.

***Kata Kunci:*** *PDP Gelombang Homogen, Syarat Batas Dirichlet, Syarat Batas Neumann*

***ABSTRACT***

*This paper examines the Homogeneous Wave Partial Differential Equations (PDE) on the interval* $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$*with the conditions of Dirichlet and Neumann boundary conditions. Research done by understanding in advance of the general form PDP second order, coordinate transformation, the canonical form second order linear PDE, as well as forms of Homogenous Wave Partial Differential Equations unconditional settlement boundaries and find the solutions. Once the research is done by introducing a common form Homogeneous Waves PDE with Dirichlet and Neumann boundary conditions and their completion. In this paper we also included examples of the implementation of the homogeneouswaves PDE for both types of the boundary conditions and the analysis.*

***Keywords****: Homogeneous Waves PDE, Dirichlet and Neumann Boundary Value conditions*

## Pendahuluan

Fenomena gelombang sangat sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya ketika terjadi gulungan ombak di laut, bermain lompat tali, sebaran gelombang ektromagnetik dari peralatan elektronik sampai kepada fenomena mekanika kuantum yang menggunakan gelombang Schrodinger. Untuk memahami fenomena gelombang yang terjadi disekitar, dibutuhkan bidang ilmu yang tepat sehingga fenomena gelombang tersebut dapat dijelaskan secara ilmiah. Salah satu bidang ilmu yang dapat menjelaskan fenomena gelombang adalah metematika dengan menggunakan Persamaan Differensial Parsial (PDP). Model matematika yang dihasilkan disebut model matematika PDP.

Persamaan differensial sejatinya merupakan sebuah persamaan matematis yang menjelaskan mengenai perubahan sifat atau perilaku dari suatu fenomena alam terhadap satuan waktu. Misalnya, seseorang berdiri disuatu titik pada saat $t = t_0$, kemudian pada saat $t = t_1$ orang tersebut telah berada 10 meter lebih jauh dari tempatnya semula. Dengan demikian ada perubahan posisi orang tersebut yang bergantung pada waktu $t$ sehingga fenomena tersebut dapat dimodelkan dengan persaman differensial.

Lebih lanjut misalkan seorang pelari dapat menempuh jarak $x$ dengan waktu $t$, maka kecepatan pelari $v$ dapat diintepretasikan sebagi persamaan differensial $v = \frac{dx}{dt}$ yang menjelaskan perubahan atas jarak $x$ terhadap waktu $t$. Persamaan Differensial berdasarkan variabel yang dimiliki dapat dibagi menjadi dua jenis, yakni Persamaan Differensial Total dan Persamaan Differensial Parsial. Apabila terdapat suatu fungsi $Z = F(x)$, maka turunan fungsi $Z$ dinamakan turunan (differensial) total. Hal ini dikarenakan fungsi $Z$ akan diturunkan pada satu-satunya variabel bebas yang dimiliki yakni $x$ .Turunan total untuk fungsi $Z$ ini secara matematisditulis sebagai $\frac{dZ}{dx}$ atau $\frac{dF(x)}{dx}$. Lebih lanjut apabila terdapat suatu fungsi $Z = F(x, y)$, maka fungsi $Z$ dapat diturunkan kepada variabel bebas $x$ atau $\left(\frac{\partial Z}{dx}\right)$ dan $y$ yang dinotasikan dengan $\left(\frac{\partial Z}{dy}\right)$. Dengan demikian turunan untuk fungsi $Z$ ini disebut turunan atau differensial parsial.

Dalam memahami fenomena gelombang, PDP merupakan salah satu caraatau alat yang dapat digunakan. Hal utama yang hendak diketahui dari fenomena gelombang pada umumnya adalah seberapa besar gelombang yang terjadi pada suatu posisi $x$ saat $t$ atau $U(x,t)$. Untuk mengetahui hal ini, langkah awal yang dilakukan adalah memodelkan gelombang tersebut kedalam suatu model matematika PDP, kemudian setelahnya dapat dicari solusi penyelesaian dari model PDP tersebut.
Penelitian ini bertujuan untuk memahami dan memodelkan suatu fenomena gelombang. Dimulai dengan mempeajari hukum-hukum Newton yang terkait dengan gelombang serta merumuskan variabel-variabel yang berpengaruh dalam fenomena gelombangtersebut. Setelah itu dibentuk model PDP gelombang dan dicari solusi penyelesaiannya. Model yang terbentuk dikembangkan kembali dengan memberikan suatu syarat awal dan batas dengan harapanagar model dan solusi yang dihasilkan dapat lebihakurat dan sesuai fenomena gelombang yang terjadi sebenarnya. Beberapa contoh soal gelombang diberikan sebagai suatu aplikasi atau penerapan dalam model PDP yang telah dihasilkan.

## Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pustaka, yakni mempelajari terlebih dahulu bentuk PDP linear orde dua, transformasi koordinat, bentuk kanonik PDP linear orde dua dan bentuk umum PDP Gelombang homogen tanpa syarat batas serta mencari solusi penyelesaianya. Setelah itu, dibentuk PDP Gelombang dengan syarat batas Diriclet dan Neumann serta mencari solusi penyelesaian untuk kedua syarat batas tersebut. Buku-buku penunjang yang digunakan dalam penelitian ini antara lain adalah buku *Partial Differential Equations* karya Strauss, *Introduction to Differential Equations: Lecture Notes* karya Jeffrey R Chasnov, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations Volume 5* karya Michel Chipot, buku *Persamaan Differensial Parsial*dari Departemen Matematika FMIPA ITB, *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions* karyaIgor Yanovsky dan sumber-sumberlain yang dapat dilihat ada daftar pustaka.

## Hasil dan Pembahasan

### Persamaan Differensial Parsial Linear Orde Dua

Bentuk umum Persamaan Differensial Parsial (PDP) Linear orde dua didefinisikan sebagai berikut:

$$L(U) = aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + pU_x + qU_y + rU = g \ \ldots(1)$$

dengan $a, b, c, p, q$ dan $r$ merupakan fungsi dua peubah dan $U(x, y)$ merupakan fungsi yang dicari. Asumsikan $a, b$ dan $c$ tak nol serempak, maka diperoleh bentuk

$$[U] = aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} \ \ldots(2)$$

Yang merupakan bagian utama dari operator $L$ yang memuat suku-suku orde dua. Berdasarkan nilai diskriminannya $\delta(L) = b^2 - ac$, PDP linier orde dua dapat dibagi menjadi tiga tipe yakni

1. Tipe Eliptik
   Suatu PDP Linear orde dua disebut eliptik apabila $\delta(L) = b^2 - ac < 0$. Contoh PDP linear orde dua yang termasuk eliptik adalah Persamaan Laplace $U_{xx} + U_{yy} = 0$

2. Tipe Parabolik
   Suatu PDP Linear orde dua disebut parabolik apabila $\delta(L) = b^2 - ac = 0$.
   Contoh PDP linear orde dua yang termasuk tipe Parabolik adalah Persamaan Difusi $U_t = \mathrm{k}U_{xx},\ k \epsilon R$
3. Tipe Hiperbolik
   Suatu PDP Linear orde dua disebut Hiperbolik apabila $\delta(L) = b^2 - ac > 0$. Contoh PDP linear orde dua yang termasuk dalamtipe ini adalah Persamaan Gelombang $U_{tt} = \mathrm{C}^2 U_{xx}$, $C \epsilon R$ □

**Perubahan (Transformasi) Koordinat**

$(p,q) = (p(x,y), q(x,y))$ disebut perubahan (transformasi) koordinat atau sering disebut juga sebagai trasnformasi tak singular apabila nilai Jakobiannya tidak sama dengan nol dengan Jakobian didefinisikan sebagai

$$J = \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} = p_x q_y - p_y q_x \ldots(3)$$

Misalkan $W(p,q) = U(x(p,q), y(p,q))$, maka solusi untuk bentuk umum PDP linier orde dua persamaan $(1)$ dengan transformasi koordinat $(p,q) = (p(x,y), q(x,y))$ dihitung dengan menggunakan

$$\begin{aligned} U_x &= W_p p_x + W_q q_x \\ U_y &= W_p p_y + W_q q_y \end{aligned} \ldots(4)$$

Berdasarkan hal tersebut diperoleh bentuk transformasi dari $L(U)$ yakni

$$l(W) = AW_{\xi\xi} + 2BW_{\xi\eta} + CW_{\eta\eta} + PW_{\xi} + QW_{\eta} + RW = G \ldots(5)$$

denganfungsi $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$ dan $C(\xi,\eta)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} A(\xi,\eta) &= a\xi_x^{\ 2} + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^{\ 2}, \\ B(\xi,\eta) &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \ldots(6) \\ C(\xi,\eta) &= a\eta_x^{\ 2} + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^{\ 2} \end{aligned}$$

Yang secara matriks dapat disajikan pula dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \ldots(7)$$

Selanjutnya dengan mengingat bentuk Jakobian seperti halnya pada bentuk $(3)$ di atas, maka persamaan $(7)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$AC - B^2 = J^2(ac - b^2) \ldots(8)$$

Dengan mengingat bahwa $\delta(L) = b^2 - ac$ dan $\delta(l) = B^2 - AC$, maka persamaan $(8)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\delta(l) = J^2 \delta(L) \ldots(9)$$

Dengan nilai Jakobian setelah transformasi koordinat adalah $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$ □

**Bentuk Kanonik PDP Linier Orde Dua**

Misalkan PDP$(1)$ bertipe Hiperbolik (Parabolik/Eliptik) pada domain $D$, maka terdapat suatu sistem koordinat $(\xi,\eta)$ dengan persamaan $(1)$ memiliki bentuk kanonik

1. $l(W)=W_{\xi\eta}+l_1(w)=G$ untuk PDP bertipe Hiperbolik
2. $l(W)=W_{\xi\xi}+l_1(w)=G$ untuk PDP bertipe Parabolik
3. $l(W)=W_{\xi\xi}+W_{\eta\eta}+l_1(w)=G$ untuk PDP bertipe Eliptik

dengan $l_1(w)$ merupakan operator differensial orde satu dan $G$ merupakan suatu fungsi. Karena penelitian ini mengkaji mengenai PDP Gelombang, maka pembahasan bentuk kanonik hanya akan dilakukan untuk PDP yang bertipe Hiperbolik.

Asumsikan bahwa $a(x,y)\neq 0,(x,y)\in D$, maka untuk memperoleh bentuk Hiperbolik $\delta(l)=B^2-AC>0$, maka salah satu cara memperolehnya adalah dengan membentuk $A=0$ dan $C=0$, atau dengan kata lain

$$\begin{aligned} A(\xi,\eta)&=a\xi_x^{\;2}+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^{\;2}=0\\ C(\xi,\eta)&=a\eta_x^{\;2}+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^{\;2}=0 \end{aligned}\quad\ldots(10)$$

Karena bentuk $\xi$ dan $\eta$ sama, maka cukup diselesaikan satu diantara $A$ atau $C$. Misalkan dipilih $A$ untuk diselesaikan, dengan demikian dapat dituliskan

$$a\xi_x^{\;2}+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^{\;2}=0\ \ldots(11)$$

Persamaan $(11)$ dapat disajikan kembali sebagai perkalian dua buah PDP linier sebagai berikut

$$\frac{1}{a}\left[a\xi_x+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y\right]\left[a\xi_x+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y\right]=0\ \ldots(12)$$

Berdasarkanpersamaan $(12)$, karena $\frac{1}{a}\neq 0$, maka diperoleh bentuk

$$\left[a\xi_x+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y\right]\left[a\xi_x+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y\right]=0\ \ldots(13)$$

dengan kata lain harus diselesiakan

$$\begin{aligned} a\xi_x+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y&=0\\ a\xi_x+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\xi_y&=0 \end{aligned}\quad\ldots(14)$$

Yang merupakan dua buah PDP linear. Dengan metode karakteristik, diperoleh fungsi konstan $\xi$ dan $\eta$ sebagai berikut

1. Fungsi $\xi$ konstan sepanjang kurva karakteristik adalah $\frac{dy}{dx}=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$ dan
2. Fungsi $\eta$ konstan sepanjang kurva karakteristik adalah $\frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$ □

**PDP Gelombang Homogen**

Asumsikan sebuah tali elastis, homogen dan fleksible dengan panjang $l$ mengalami getaran atau gelombang seperti halnya tali senar pada gitar atau dawai pada biola. Homogen dalam penelitian ini memberikan arti bahwa tali diasumsikan hanya terbuat dari satu jenis bahan material, atau dengan kata lain masa jenis atau kepadatan tali $\rho$ adalah tetap. Lebih lanjut, sifat fleksibel memberikan arti bahwa tegangan tali (*tention*) menyinggung langsung sepanjang tali dan $T(x,t)$ merupkan vektor tegangan tali. Hukum Newton III menyatakan bahwa gaya aksi dan reaksi memiliki besar yang sama dengan arah terbalik dan segaris dengan sumbu horizontal $x$ atau secara matematis dapat dituliskan sebagai

$$T(x,t)\cos\alpha_1 = T(x+h,t)\cos\alpha_2 = T \ \ldots(15)$$

Lebih lanjut Hukum Newton II menyatakan bahwa sebuah benda dengan massa $m$ mengalami gaya resultan sebesar $F$ atau secara matematis dapat disajikan sebagai berikut

$$\sum F = m.a \ \ldots(16)$$

Karena massa $m$ merupakan perkalian atas massa jenis dengan panjang atau $m = \rho h$ dan percepatan $a$ merupakan turunan kedua dari fungsi $U(x,t)$ dengan $U(x,t)$ menyatakan fungsi solusi gelombang yang dicari, maka persamaan $(16)$ dapat dituliskan kembali sebagai

$$\sum F = \rho h.U_{tt} \ \ldots(17)$$

Dilain pihak gaya resultan $\sum F = -T(x,t)\sin\alpha_1 + T(x+h,t)\sin\alpha_2$, sehingga berdasarkan hal tersebut diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\rho h.U_{tt} = -T(x,t)\sin\alpha_1 + T(x+h,t)\sin\alpha_2 \ldots(18)$$

Dengan mengingat bahwa $T = T(x,t)\cos\alpha_1 = T(x+h,t)\cos\alpha_2$ dengan kata lain $T = T(x,t)\cos\alpha_1 \Leftrightarrow T(x,t) = \dfrac{T}{\cos\alpha_1}$ dan $T = T(x+h,t)\cos\alpha_2 \Leftrightarrow T(x+h,t) = \dfrac{T}{\cos\alpha_2}$ yakni sesuai dengan persamaan $(15)$, maka persamaan $(18)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\rho h.U_{tt} = -T\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} + T\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1} \ldots(19)$$

Dengan mengingat bahwa $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{Tan}\,\alpha$, maka persamaan $(19)$ dapat dituliskan kembali sebagai

$$\rho h.U_{tt} = -T\tan\alpha_1 + T\tan\alpha_2 \ldots(20)$$

Perhatikan bahwa fungsi $U_x(x,t)$ merepresentasikan kemiringan tali di $x$ saat $t$ sehingga $T\tan\alpha_1$ dan $T\tan\alpha_2$ dapat didekati dengan hampiran $T\tan\alpha_1 \approx U_x(x,t)$ dan $T\tan\alpha_2 \approx U_x(x+h,t)$,dengan demikian persamaan $(20)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned}\rho h.U_{tt} &= -TU_x(x,t) + TU_x(x+h,t)\\ &= T\left[U_x(x+h,t) - U_x(x,t)\right] (\ldots 21)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan $(21)$ tersebut dapat ditemukan fungsi $U_{tt}$ sebagai berikut

$$U_{tt} = \frac{T}{\rho}\frac{\left[U_x(x+h,t) - U_x(x,t)\right]}{h} (\ldots 22)$$

Apabila diambil bentuk limit $h \to 0$ untuk persamaan $(22)$, maka diperoleh

$$\lim_{h\to 0} U_{tt} = \frac{T}{\rho}\lim_{h\to 0}\frac{\left[U_x(x+h,t) - U_x(x,t)\right]}{h} = \frac{T}{\rho}(U_x)_x (\ldots 23)$$

Berdasarkan persamaan $(23)$ diperoleh bentuk PDP Gelombang Homogen sebagai berikut

$$U_{tt} = \frac{T}{\rho} U_{xx} \Leftrightarrow U_{tt} = C^2 U_{xx}, C = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\ldots 24). \square$$

**PDP Gelombang Homogen Dalam Interval $\boldsymbol{R}(-\infty, \infty)$**

Bentuk umum persamaan Gelombang dalam interval $\boldsymbol{R}(-\infty, \infty)$dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &U_{tt} = C^2 U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = f(x) \qquad\qquad \ldots(25) \\ &U_t(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

Bentuk $U(x,0) = f(x)$ dan $U_t(x,0) = g(x)$ pada persamaan $(25)$ merupakan syarat awal untuk persamaan Gelombang pada interval $\boldsymbol{R}$ yang merepresentasikan solusi $U(x,t)$ saat $t=0$ bernilai $f(x)$ dan turunan $U_t(x,t)$ saat $t=0$ bernilai $g(x)$. Lebih lanjut, akan dicari solusi $U(x,t)$ pada persamaan $(25)$ tersebut.

Untuk mencari solusi $U(x,t)$ pada PDP Gelombang homogen, akandilakukan perubahan (transformasi) koordinat. Dengan memperhatikan fungsi konstan $\xi$ dan $\eta$ sepanjang kurva karakteristik $\frac{dy}{dx}$ diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \Leftrightarrow x = \pm Ct + k \quad (\ldots 26)$$

Dengan demikian persamaan karakteristik dari PDP Gelombang ini adalah

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \quad (\ldots 27)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik $(27)$, maka dapat diperoleh turunaan fungsi $U_t(x,t)$ dan $U_{tt}(x,t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} U_t(x,t) &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = C\left(U_\xi - U_\eta\right) \\ U_{tt}(x,t) &= C\left(U_\xi - U_\eta\right)_t = C^2\left(U_{\xi\xi} - U_{\xi\eta}\right) - C^2\left(U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta}\right) \end{aligned} \quad (\ldots 28)$$

Berdasarkan persamaan $(27)$ pula dapat ditemukan turunan fungsi $U_x(x,t)$ dan $U_{xx}(x,t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} U_x(x,t) &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta \\ U_{xx}(x,t) &= \left(U_\xi + U_\eta\right)_t = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (\ldots 29)$$

Berdasarkan hal tersebut, solusi umum PDP Gelombang Homogen dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan $(28)$ dan $(29)$, yakni

$$\begin{aligned} U_{tt} - C^2 U_{xx} &= C^2\left(U_{\xi\xi} - U_{\xi\eta}\right) - C^2\left(U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta}\right) - C^2\left(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}\right) \\ &= -C^2 U_{\xi\eta} - C^2 U_{\xi\eta} - 2C^2 U_{\xi\eta} \quad (\ldots 30) \\ &= -4C^2 U_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan $(30)$, karena $U_{tt} - C^2 U_{xx} = 0$, maka $-4C^2 U_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow U_{\xi\eta} = 0$. Dengan demikian solusi umum PDP Gelombang Homogen adalah sebagai berikut

$$U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$
$$U(x,t) = F(x+Ct) + G(x-Ct) \quad (\ldots 31)$$

Persamaan $(31)$ merupakan solusi umum PDP Gelombang Homogen, lebih lanjut dengan memandang syarat awal yang diberikan yakni $U(x,0) = f(x)$ dan $U_t(x,0) = g(x)$, maka akan dicari solusi khusus dari PDP Gelombang Homogen tersebut. Berdasarkan syarat awal, diperoleh

$$\begin{aligned} U(x,0) &= F(x) + G(x) \Leftrightarrow F(x) + G(x) = f(x) \\ U_t(x,0) &= C\left(F'(x) - G'(x)\right) \Leftrightarrow C\left(F'(x) - G'(x)\right) = g(x) \end{aligned} \quad (\ldots 32)$$

Perhatikan $U_t(x,0)$ dari persamaan $(32)$, apabila variabel $x$ diganti dengan $s$, maka diperoleh bentuk sebagai berikut

$$C\left(F'(s) - G'(s)\right) = g(s) \Leftrightarrow \frac{1}{C} g(s) = F'(s) - G'(s)$$

Integralkan persamaan $(33)$ kepada variabel $s$ $(ds)$ dengan selang $[0,x]$, maka diperoleh

$$\frac{1}{C}\int_0^x g(s)ds = \int_0^x \left(F'(s) - G'(s)\right)ds \Leftrightarrow \frac{1}{C}\int_0^x g(s)ds + k = F(x) - G(x) \quad (\ldots 34)$$

Eliminasikan $U(x,0)$ pada persamaan $(32)$ dengan persamaan $(34)$ sehingga diperoleh nilai $F(x)$ sebagai berikut

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2C}\int_0^x g(s)ds + \frac{k}{2} \quad (\ldots 35)$$

Berdasarkan persamaan $(35)$, dapat diperoleh nilai $G(x)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} G(x) &= f(x) - F(x) \\ &= f(x) - \left(\frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2C}\int_0^x g(s)ds + \frac{k}{2}\right) \quad (\ldots 36) \\ &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2C}\int_0^x g(s)ds - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan $(35)$ dan $(36)$, diperoleh solusi khusus PDP Gelombang Homogen $U(x,t)$ berdasarkan persamaan $(31)$ adalah

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \left(\frac{f(x+Ct)}{2} + \frac{1}{2C}\int_0^{x+Ct} g(s)ds + \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{f(x-Ct)}{2} - \frac{1}{2C}\int_0^{x-Ct} g(s)ds - \frac{k}{2}\right) \\ &= \frac{f(x+Ct) + f(x-Ct)}{2} + \frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(s)ds \quad (\ldots 37) \end{aligned}$$

Yang dikenal dengan formula De'Allembert. □

**PDP Gelombang Homogen Dalam Interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$ Dengan Syarat Batas Dirichlet**

Bentuk umum persamaan Gelombang homogen dalam interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$ dengan syarat batas Dirichlet dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &U_{tt} = C^2 U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = f(x) \\ &U_t(x,0) = g(x) \\ &U(0,t) = 0 \end{aligned} \quad \ldots(38)$$

Sebelum mencari solusi PDP gelombang dengan syarat batas Dirichlet pada persamaan $(38)$, perlu dikenalkan mengenai perluasan fungsi ganjil yang berkorespondensi dengan syarat batas Dirichlet. Perluasan fungsi ganjil $\varnothing_1(x)$ didefinisikan sebagai

$$\varnothing_1(x) = \begin{cases} \varnothing(x), x > 0 \\ -\varnothing(-x), x < 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \ldots(39)$$

Berdasarkan hal tersebut solusi PDP Gelombang untuk syarat batas Dirichlet adalah

$$U(x,t) = \frac{\varnothing(x+Ct) + \left(-\varnothing\left(-(x-Ct)\right)\right)}{2} + \frac{1}{2C}\left(\int_{x-Ct}^{0} -\varnothing(-s)ds + \int_{0}^{x+Ct} \varnothing(s)ds\right) \ldots(40)$$

Misalkan $z = -s \Leftrightarrow dz = -ds$, maka persamaan $(40)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$U(x,t) = \frac{\varnothing(x+Ct) - \varnothing(Ct-x)}{2} + \frac{1}{2C}\left(\int_{Ct-x}^{0} \varnothing(z)dz + \int_{0}^{x+Ct} \varnothing(s)ds\right) \ldots(41)$$

Lebih lanjut misalkan $z = s$, $dz = ds$, maka solusi PDP Gelombang homogen dengan Dirichletadalah

$$U(x,t) = \frac{\varnothing(x+Ct) - \varnothing(Ct-x)}{2} + \frac{1}{2C}\int_{Ct-x}^{x+Ct} \varnothing(s)ds \ (\ldots 42)$$

**PDP Gelombang Homogen Dalam Interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$Dengan Syarat Batas Neumann**

Bentuk umum persamaan Gelombang homogen dalam interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$dengan syarat batas Neumann dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &U_{tt} = C^2 U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = f(x) \\ &U_t(x,0) = g(x) \\ &U_x(0,t) = 0 \end{aligned} \quad \ldots(43)$$

Sebelum mencari solusi PDP Gelombang homogen dengan syarat batas Neumann pada persamaan $(43)$, perlu dikenalkan mengenai perluasan fungsi genap yang berkorespondensi dengan syarat batas Neumann. Perluasan fungsi genap $\varnothing_2(x)$ didefinisikan sebagai

$$\varnothing_2(x) = \begin{cases} \varnothing(x), x > 0 \\ \varnothing(-x), x < 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \ldots(44)$$

Berdasarkan hal tersebut solusi PDP Gelombang untuk syarat batas Neumann adalah

$$U(x,t) = \frac{\varnothing(x+Ct) + \left(\varnothing\left(-(x-Ct)\right)\right)}{2} + \frac{1}{2C}\left(\int_{x-Ct}^{0} \varnothing(-s)ds + \int_{0}^{x+Ct} \varnothing(s)ds\right) \ldots(45)$$

Misalkan $z=-s \Leftrightarrow dz=-ds$, maka persamaan $(45)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$U(x,t)=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(-\int_{Ct-x}^{0}\varnothing(z)dz+\int_{0}^{x+Ct}\varnothing(s)ds\right)\ldots(46)$$

Untuk nilai $z=s \Leftrightarrow dz=ds$, perhatikan bahwa persamaan $(46)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$U(x,t)=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(\left(\int_{0}^{Ct+x}\varnothing(s)ds-\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds\right)+\int_{0}^{x+Ct}\varnothing(s)ds\right)$$

$$=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(2\int_{0}^{Ct+x}\varnothing(s)ds-\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds\right)$$

$$=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(2\left(\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds-\int_{Ct-x}^{0}\varnothing(s)ds\right)-\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds\right)\ldots(47)$$

Berdasarkan persamaan $(47)$, solusi PDP Gelombang homogen dengan syarat batas Neumann adalah

$$U(x,t)=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds-2\int_{Ct-x}^{0}\varnothing(s)ds\right)$$

$$=\frac{\varnothing(x+Ct)+\varnothing(Ct-x)}{2}+\frac{1}{2C}\left(\int_{Ct-x}^{Ct+x}\varnothing(s)ds+2\int_{0}^{Ct-x}\varnothing(s)ds\right)\ldots(47)$$

**Contoh penerapan**

1. Diberikan fungsi PDP Gelombang dengan syarat awal sebagai berikut

   $U_{tt}=C^2U_{xx},-\infty<x<\infty$

   $U(x,0)=0$

   $U_t(x,0)=\cos x$

   tentukan solusi PDP Gelombang $U(x,t)$ tersebut

   **Solusi**

   $$U(x,t)=\frac{f(x+Ct)+f(x-Ct)}{2}+\frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct}\cos s ds$$

   $$=\frac{0+0}{2}+\frac{1}{2C}\left(\sin(x+Ct)-\sin(x-Ct)\right)$$

   $$=\frac{1}{2C}\left(\sin(x+Ct)-\sin(x-Ct)\right)$$

   $$=\frac{1}{2C}\left(2\cos x\sin Ct\right)$$

   $$=\frac{1}{C}\left(\cos x\sin Ct\right)$$

2. Jika $\varnothing$ dan $\varphi$ merupakan dua buah fungsi ganjil dari $x$, tunjukkan bahwa solusi $U(x,t)$ juga merupakan fungsi ganjil dari $x$ untuk setiap $t$

   **Solusi**

Jika $\varnothing$ dan $\varphi$ merupakan dua buah fungsi ganjil dari $x$, maka $\varnothing(-x)=-\varnothing(x)$ dan $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. Berdasarkan hal tersebut akan ditunjukkan bahwa $U(-x,t)=-U(x,t)$.

$$U(-x,t)=\frac{1}{2}\left[\varnothing(-x+Ct)+\varnothing(-x-Ct)\right]+\frac{1}{2C}\int_{-x-Ct}^{-x+Ct}\varphi(s)ds$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\varnothing(x-Ct)-\varnothing(x+Ct)\right]+\frac{1}{2C}\int_{-x-Ct}^{-x+Ct}\varphi(-s)d(-s)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\varnothing(x-Ct)+\varnothing(x+Ct)\right]-\frac{1}{2C}\int_{-x-Ct}^{-x+Ct}\varphi(s)d(s)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\left[\varnothing(x-Ct)+\varnothing(x+Ct)\right]+\frac{1}{2C}\int_{-x-Ct}^{-x+Ct}\varphi(s)d(s)\right)$$

$$=-U(x,t)$$

## Kesimpulan dan Saran

Dalam penelitian ini dapat dirumuskan beberapa kesimpulan dan saran sebagai berikut:

**Kesimpulan**

1. PDP Gelombang dapat dikatakan sebagai suatu persamaan differensial parsial yang menjelaskan aktivitas gelombang. Solusi $U=(x,t)$ menjelaskan keadaan gelombang pada posisi $x$ saat $t$.
2. Bentuk umum PDP GelombangHompgen pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$ditunjukkan pada persamaan $(25)$ dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan $(37)$
3. Bentuk umum PDP Gelombang pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$dengan syarat Dirichletditunjukkan pada persamaan $(38)$ dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan $(42)$
4. Bentuk umum PDP Gelombang pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$dengan syarat Neumannditunjukkan pada persamaan $(43)$ dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan $(47)$

**Saran**

1. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Gelombang Non homogen pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$beserta solusi penyelesaiannya
2. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Gelombang Non homogen pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$dengan syarat batas Dirichlet yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi ganjil beserta solusim penyelesaiannya
3. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Gelombang Non homogen pada interval $\boldsymbol{R}(-\infty,\infty)$dengan syarat batas Neumann yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi genap beserta solusi penyelesaiannya

## Daftar Pustaka

[1] Strauss, A., Walter. 2008. *Partial Differential Equations: an Introduction.* USA:John Wiley &Sons

[2] Chasnov, R., Jeffrey. 2009. *Introduction to Differential Equations: Lecture Notes.* Hong Kong: The Hong Kong University of Science and Technology

[3] Chipot, Michel. 2008. *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations Volume 5.* Amsterdam: Elsevier

[4] Departemen Matematika ITB. 2012. *Persamaan Differensial Parsial.* Bandung:FMIPA ITB

[5] Folland, G.B. 1983. *Lectures on Partial Differential Equations*. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research

[6] Hunter, K., John. 2014. *Notes on Partial Differential Equations.* California: Department of Mathematics, University of California at Davis

[7] Logan, J., David. *Applied Partial Differential Equations: Second Editions.* New York: Springer-VerlagBerlin Heidelberg

[8] Markowich. Peter. 2007. *Applied Partial Differential Equations: A Visual Approach*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[9] Miersemann, Erich. 2012. *Partial Differential Equations: Lecture Notes*. Leipzig: Department of Mathematics Leipzig University

[10] Jeffrey. Allan. 2003. *Applied Partial Differential Equations: an Introduction*. California: Elsevier Sciences

[11] Moore, Doug. 2003. *Introduction to Partial Differential Equations*. California: Department Mathematics of UCSB

[12] Pinchover & Rubinsten. 2005. *An Introduction to Partial Differential Equations*. London: Cambridge University Press

[13] Yanovsky, Igor.2005. *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions.* California: Department of Mathematics UCLA