Modifikasi Varian Metode Newton dengan Orde Konvergensi Tujuh

Wartono[1], Ria Rasela[2]
[1,,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Pekanbaru, 28293
[1]Email: wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Metode Varian Newton merupakan salah satu metode iterasi yang memiliki orde konvergensi tiga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Pada makalah ini, penulis memodifikasi varian metode Newton menjadi tiga langkah dengan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua. Analisa konvergensi menunjukkan bahwa metode iterasi yang di usulkan mempunyai orde konvergensi paling rendah enam dan melibatkan empat evaluasi fungsi per iterasi dengan indeks efisiensi sebesar 1,627. Simulasi numerik diberikan dengan menggunakan beberapa fungsi dan dibandingkan dengan beberapa metode lainnya untuk menunjukkan performa metode iterasi yang diusulkan.

Kata Kunci: Interpolasi Lagrange orde dua, orde konvergnsi, persamaan nonlinear, varian metode Newton

ABSTRACT

Variant Newton method is one of an iteration method with third-order convergence for solving nonlinear equations. In this paper, the author modified the variant of Newton method to became three step by using the second order Lagrange interpolation. The analysis of convergence shows that the proposed method is at least of sixth order convergence and requires four evaluation functions per iteration with efficiency index 1,627. Numerical simulation is given by using several functions and is compared with other some methods to show the performance of modification of the proposed method.

Keywords: *Second order Lagrange interpolation, , order of convergence, nonlinear equation, varint of Newton methods*

Pendahuluan

Persamaan nonlinear merupakan representasi dari persoalan sains dan rekayasa, dan hampir sebagain besar persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, penyelesaian aternatif dilakukan secara numerik dalam bentuk perhitungan komputasi berulang, yang biasa disebut dengan metode iterasi.

Salah satu metode iterasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear adalah metode Newton dengan bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ f(x_n) \neq 0 \text{ dan } n = 0, 1, 2, 3 \tag{1}$$

Metode Newton merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi kuadratik dan melibatkan dua evaluasi fungsi.

Pengembangan metode iterasi Newton menjadi metode iterasi dengan orde konvergensi lebih tinggi banyak dilakukan oleh peneliti dengan cara memodifikasi metode iterasi menjadi dua langkah dengan menggunakan berbagai pendekatan: integral Newton [13], titik tengah [7], rataan harmonik [8, 10], kuadratur Newton-Cote [6, 11], selisih terbagi maju [12].

Metode yang Dikembangkan

Pertimbangkan kembali modifikasi metode Newton yang dilakukan oleh Weerakoon [12] dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \tag{2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

Persamaan (2) dikenal dengan nama metode Varian Newton dua langkah yang memiliki orde konvergensi tiga dan melibatkan tiga evaluasi fungsi sehingga indeks efisiennya sebesar $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44224957$.

Selanjutnya untuk meningkatkan indeks efisiensi suatu metode iterasi dilakukan reduksi terhadap $f'(y_n)$ pada persamaan (2) dengan menggunakan teknik Chun [2] dengan bentuk:

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)\big(f(x_n) + (\beta - 2)f(y_n)\big)}{f(x_n) + \beta f(y_n)} \tag{4}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4) ke Persamaan (2), maka diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) + f(y_n)(\beta - 1))}, \qquad \beta \in \Re \tag{5}$$

dengan y_n adalah bentuk Newton yang diberikan pada Persamaan (3). Persamaan (5) adalah modifikasi metode Newton dua langkah dengan tiga evaluasi fungsi dan satu parameter real.

Untuk meningkatkan orde konvergensi, ditambahkan metode Newton pada langkah ketiga dalam z_n, ditulis sebagai berikut

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{6}$$

Bentuk $f'(z_n)$ pada Persamaan (6) akan diaproksimasikan dengan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua sebagaimana yang telah dilakukan oleh Zhao, dkk [21] dalam bentuk

$$\begin{aligned} f'(z_n) &= \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} + \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \\ &= f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n] \end{aligned} \tag{7}$$

sehingga persamaan (6) dapat ditulis kembali menjadi

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \tag{8}$$

Oleh karena itu, secara lengkap modifikasi varian metode Newton tiga langkah dapat ditulis sebagai berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{9a}$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) + f(y_n)(\beta - 1))} \tag{9b}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \tag{9c}$$

Persamaan (9) merupakan modifikasi varian metode Newton tiga langkah yang melibatkan empat evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$, dan $f'(x_n)$.

Hasil dan Pembahasan

a. Analisis Konvergensi

Persamaan (9a) – (9c) merupakan modifikasi metode iterasi tiga langkah Varian Newton dengan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua. Selanjutnya, teorema berikut diberikan bahwa orde konvergensi persamaan (9a) – (9c) adalah tujuh untuk $\beta = -1$.

Teorema 1 : Misalkan $f : D \in \Re \to \Re$ adalah fungsi terdifferensialkan pada interval buka D dan mempunyai akar tunggal di $\alpha \in D$. Jika x_0 cukup dekat ke α maka Persamaan (9a) – (9c) memiliki orde konvergensi tujuh dengan $\beta = -1$ yang memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = c_2^2 c_3 (c_3 - c_2^2) e_n{}^7 + O(e_n{}^8)$$

Bukti:

Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asusmsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi $f(x_n)$ di sekitar α, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(e_n) + \frac{f''(\alpha)}{2!} e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!} e_n{}^3 + \cdots + O(e_n{}^8) \\ &= f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + c_4 e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)) \end{aligned} \tag{10}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar α diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + 4c_4 e_n{}^3 + 5c_5 e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)) \tag{11}$$

Pembagian dari Persamaan (10) dan (11) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + c_4 e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + 4c_4 e_n{}^3 + 5c_5 e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8))} \\ &= e_n - c_2 e_n{}^2 + (2c_2^2 - 2c_3) e_n{}^3 + (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{12}$$

Substitusikan Persamaan (12) ke Persamaan (9a), sehingga diperoleh:

$$y_n = \alpha + c_2 e_n{}^2 - (2c_2^2 - 2c_3) e_n{}^3 + (-7c_2 c_3 + 4c_2^3 + 3c_4) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \tag{13}$$

Persamaan (13) dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$y_n = \alpha + s_n$$

dengan

$$s_n = c_2 e_n{}^2 - (2c_2^2 - 2c_3) e_n{}^3 + (-7c_2 c_3 + 4c_2^3 + 3c_4) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \tag{14}$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor dari $f(y_n)$ disekitar α, maka diperoleh:

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n{}^2 + (2c_3 - 2c_2^2) e_n{}^3 + (5c_2{}^3 - 7c_2 c_3) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)) \tag{15}$$

Kemudian didapat

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) + f(y_n)(\beta - 1))} \\ &= e_n + (c_2^2(-\beta - 1)) e_n{}^3 + (c_2^3(\beta^2 + 3 + 5\beta) + c_2 c_3(-4\beta - 3)) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya substitusikan Persamana (16) ke Persamaan (9b), maka diperoleh

$$z_n = \alpha + (c_2^2(\beta + 1)) e_n{}^3 + (c_2^3(-\beta^2 - 5\beta - 3) + c_2 c_3(4\beta + 3)) e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)) \tag{17}$$

Persamaan (17) dapat ditulis kembali dengan bentuk

$$z_n = \alpha + d_n$$

dengan

$$d_n = (c_2^2(\beta+1))e_n{}^3 + (c_2^3(-\beta^2 - 5\beta - 3) + c_2c_3(4\beta+3))e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \tag{18}$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor dari $f(z_n)$ disekitar α, memberikan

$$f(z_n) = (c_2^2(\beta+1))e_n{}^3 + (c_2^3(-\beta^2 - 5\beta - 3) + c_2c_3(4\beta+3))e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \tag{19}$$

Menggunakan cara yang sama, berdasarkan $x_n = e_n + \alpha$, Persamaan (10), (13), (15), (17) dan Persamaan (19), masing-masing diperoleh

$$\begin{aligned} f[x_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2e_n + c_3e_n{}^2 + (c_2^2(\beta+1) + c_4)e_n{}^3 + c_2c_4(-6(\beta+1)^2) + \\ c_2^2c_3(8 + 45\beta + 36\beta^2 + 6\beta^3) + c_2^4(1 - 25\beta + 25\beta^2 - 9\beta^3 - \beta^4) \\ + c_3^2(-3 - 6\beta - 4\beta^2) + 3c_5)e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} f[y_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2^2e_n{}^2 + (2c_2c_3 + c_2^3(\beta-1))e_n{}^3 + (4c_2^2c_3(\beta-1) + 3c_2c_4 \\ c_2^4(1 - 5\beta - \beta^2))e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{21}$$

dan

$$\begin{aligned} f[x_n, y_n] = f'(\alpha)(1 + c_2e_n + (c_2^2 + c_3)e_n{}^2 + (3c_2c_3 - 2c_2^3 + c_4)e_n{}^3 + \\ (-2c_2c_4 + 8c_2^2c_3 - 3c_2^4 - 2c_3^2 + c_5)e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{22}$$

Berdasarkan Persamaan (22), (23) dan Persamaan (24), maka diperoleh

$$\begin{aligned} f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n] = 1 + (2c_2^3(\beta+1) - c_2c_3)e_n{}^3 + (c_2c_4 \\ (-1 - 12\beta - 6\beta^2) + c_2^2c_3(-4 + 49\beta \\ + 36\beta^2 - 6\beta^3) + c_3^2(-1 - 6\beta - 4\beta^2) + \\ c_2^4(5 - 30\beta - 29\beta^2 - 9\beta^3 - \beta^4)e_n{}^4 \\ + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{23}$$

Pembagian Persamaan (19) dengan Persamaan (23), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \\ = \frac{(c_2^2(\beta+1))e_n{}^3 + (c_2^3(-3 - 5\beta - \beta^2) + c_2^3(3 + 4\beta)e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)}{1 + (2c_2^3(\beta+1) - c_2c_3)e_n{}^3 + (c_2c_4(-1 - 12\beta - 6\beta^2) + \cdots)e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8)} \\ = (c_2^2(\beta+1))e_n{}^3 + (c_2c_3(4\beta \quad +3) + c_2^3(-3 - 5\beta - \beta^2))e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{24}$$

dan untuk

$$x_{n+1} = z_n - ((c_2^2 + \beta c_2^2)e_n{}^3 + (c_2c_3(4\beta+3) + c_2^3(-3 - 5\beta - \beta^2)e_n{}^4 + \cdots + O(e_n{}^8) \tag{25}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $z_n = d_n + \alpha$, dan dengan mensubstitusikan ke Persamaan (17) maka Persamaan (25) menjadi

$$\begin{aligned} e_{n+1} = (c_2^3c_3(-\beta-1) + 2c_2^5(1 + 2\beta + \beta^2))e_n{}^6 + (c_2^3c_4(-(\beta \quad +1) \\ (6\beta^2 + 12\beta + 1) + c_2^4c_3(5 + 64\beta + 98\beta^2 + 42\beta^3 + 6\beta^4) + c_2^2c_3^2 \\ (-4 - 11\beta - 10\beta^2 - 4\beta^3) + (c_2^6(-1 - 41\beta - 71\beta^2 - 40\beta^3 - 10\beta^4))e_n{}^7 + O(e_n{}^8) \end{aligned} \tag{26}$$

Persamaan (26) merupakan persamaan galat dari modifikasi metode Varian Newton menggunakan interpolasi Lagrange orde dua dengan orde konvergensi enam yang masih bergantung pada parameter β, berikut diberi beberapa nilai parameter β, yaitu:

1) $\beta = -1$, maka Persamaan (11c) menjadi

$$e_{n+1} = c_2^2c_3(c_3 - c_2^2)e_n^7 + O(e_n^8) \tag{27}$$

2) $\beta = 0$, maka Persamaan (11c) menjadi

$$e_{n+1} = (c_2^3(-c_3 + 2c_2^2))e_n^6 + O(e_n^7) \tag{28}$$

3) $\beta = 1,$ maka Persamaan (11c) menjadi

$$e_{n+1} = (c_2^3(-c_3 + 4c_2^2))e_n^6 + O(e_n^7) \tag{29}$$

Berdasdarkan Persamaan (27), (28) dan Persamaan (29) dapat disimpulkan bahwa persamaan iterasi yang baik adalah persamaan iterasi yang memiliki parameter $\beta = -1$ dengan orde konvergensi tujuh dan melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f(y_n), f(z_n)$ dan $f'(x_n),$ sehingga menghasilkan indeks efisiensi sebesar $7^{1/4} \approx 1{,}627.$

b. Simulasi Numerik

Pada subbab ini akan membahas simulasi numerik dengan menggunakan perangkat lunak Maple 13 dengan 800 digit. Fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = 10xe^{(-x^2)} - 1$ $\alpha \approx 1{,}67963061042844994067$

$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\alpha \approx 1{,}36523001341409684576$

$f_3(x) = x^3 - 10$ $\alpha \approx 2{,}15443469003188372176$

$f_4(x) = e^{-x^2+x+2} - 1$ $\alpha \approx -1{,}0000000000000000000$

$f_5(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ $\alpha \approx 1{,}00000000000000000000$

Simulasi numerik dilakukan dengan menghitung jumlah iterasi dan orde konvergensi secara komputasi (COC (*computational order of convergence*) yang diberikan oleh

$$\rho = \frac{\ln|x_{n+2} - \alpha / x_{n+1} - \alpha|}{\ln|x_{n+1} - \alpha / x_n - \alpha|} \tag{30}$$

Hasil perhitungan COC dengan menggunakan beberapa fungsi diberikan pada Tabel 1 berikut

Tabel 1 Simulasi numerik terhadap Persamaan (9) dengan $\beta = -1$

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi	$f(x_n)$	$\lvert x_n - \alpha\rvert$	COC
$f_1(x)$	1,5	3	2,956317815E-322	1,069621237E-322	6,99999988796
$f_2(x)$	1	3	2,724379184E-268	1,649799159E-269	6,99999959359
$f_3(x)$	2	3	2,173272332E-420	1,560724434E-421	6,99999999984
$f_4(x)$	0	3	3,839877558E-117	1,279959186E-117	6,99919455474
$f_5(x)$	0,5	3	8,148103075E-210	8,148103075E-210	6,99999141549

Berdasarkan Tabel 1 maka diperoleh nilai COC yang menunjukkan bahwa Persamaan (9) dengan $\beta = -1$ memiliki orde konvergensi tujuh. Selanjutnya akan dibandingkan jumlah iterasi dari Persamaan (9) dengan metode iterasi lainnya, seperti metode Newton (MN), metode Potra-Ptak (MP), serta Komposit metode Potra-Ptak dan Newton-Steffensen (KMPNS).

Tabel 2 Perbandingan jumlah iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi			
		MN	MP	KMPNS	MMVN
$f_1(x)$	1,5	9	6	5	3
$f_2(x)$	1	10	6	4	3

$f_3(x)$	2	9	6	4	3
$f_4(x)$	0	10	7	5	3
$f_5(x)$	0,5	9	6	5	3

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh perbandingan jumlah iterasi dari beberapa metode iterasi dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda. Kemudian dapat disimpulkan bahwa jumah iterasi pada Modifikasi Metode Varian Newton (MMVN) memiliki jumlah iterasi lebih sedikit. Hal ini bisa terjadi karena setiap metode iterasi memiliki cara tersendiri dalam menghampiri akar sebuah fungsi tergantung pada bentuk persamaan serta fungsi yang diberikan dan nilai awal yang diberikan pada fungsi itu.

Selanjutnya akan ditunjukkan orde konvergensi pada Tabel 2 menggunakan *Computational Order of Convergence (COC).*

Tabel 3 Perbandingan nilai COC

$f(x)$	x_0	COC			
		MN	MP	KMPNS	MMVN
$f_1(x)$	1,5	1,99999999	2,99999999	3,99999999	6,99999992
$f_2(x)$	1	1,99999999	3,00000000	3,99999999	6,99999959
$f_3(x)$	2	1,99999999	3,00000000	3,99999999	6,99999999
$f_4(x)$	0	1,99999999	2,99999999	3,99999999	6,99919455
$f_2(x)$	0,5	1,99999999	3,00000000	3,99999999	6,99999141

Tabel 3 menunjukkan orde konvergensi pada setiap metode iterasi yang diperoleh dari perhitungan COC berdasarkan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda. Kemudian dapat disimpulkan bahwa orde konvergensi MMVN lebih tinggi dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Kesimpulan

Modifikasi varian metode Newton memiliki orde konvergensi enam untuk $\beta \neq -1$ dan tujuh untuk $\beta = -1$, dan melibatkan empat evaluasi fungsi pada setiap iterasinya dengan indeks efisien $6^{1/4} \approx 1{,}5650$ untuk $\beta \neq -1$ dan $7^{1/4} \approx 1{,}6265$ untuk $\beta = -1$. Hasil numerik juga menunjukkan bahwa metode baru lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya.

Daftar Pustaka

[1] Ababneh, O. Y., New Newton's method with third-order Convergence for solving nonlinear equations, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 61, 2012, 1071-1073.

[2] Chun, C., dan Ham, Y., Some Fourth-Order Modifications of Newton's Method, *Applied Mathematics and Computation*, 197, 2008, 654-658.

[3] Chun, C., A Simply Constructed Third-Order Modifications of Newtons's Method, *Journal of Computational Applied Mathematics*, 219, 2008, 81-89.

[4] Cordero, A., dkk., A Family of Iterative Methods with Sixth and Seventh Order Convergence for Nonlinear Equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 52, 2010, 1490-1496.

[5] Frontini, M. dan Sormani, E., Some variant of Newton's method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 140, 2003, 419 – 426.

[6] Hasanov, V. I., Ivanov, I. G., dan Nedjibov, G., A new modification of Newton's method, *Applied Mathematics and Engineering*, 27, 2002, 278 -286.

[7] Jisheng, K., Yitian, L., dan Xiuhua, W., Third-order modification of Newton's method, *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 205, 2007, 1 – 5.

[8] Kalyanasundaram, J. J., Modified Newton's method using harmonic mean for solving nonlinear equations, *IOSR Journal of Mathematics*, 7(4), 2013, 93- 97.

[9] Lukic, T., Ralevic, N. M., Geometric mean Newton’s method for simple and multiple roots, *Applied Mathematics Letters*, 21, 2008, 30–36.

[10] Nedzhibov, G., On a few iterative methods for solving nonlinear equations. *Application of Mathematics in Engineering and Economics XXVIII*, in: Proceeding of the XXVIII Summer school Sozopol’ 2002, pp.1-8, Heron press, Sofia, 2002.

[11] Ozban, A.Y., Some New Variants of Newton’s Method, *Applied Mathematics Letter*, 17, 2004, 677-682.

[12] Sharma, J. R., A Composite Third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 2005, 242-246.

[13] Weerakoon, S. dan Fernando, T. G. I., A Variant of Newton’s Method eigth Accelerated Third-Order Convergence, *Applied Mathematics Letters*, 13, 2000, 87– 93.

[14] Zhao, L., dkk., New Families of Eighth-Order Methods With High Efficiency Index For Solving Nonlinear Equations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 11, 2012, 283-293.