Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

Metode Gauss-Seidel dan Generalisasi Gauss-Seidel untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Kompleks (Contoh Kasus: SPL Kompleks dengan 4 persamaan dan 4 variabel)

Fitri Aryani[1], Leni Tri Lestari[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email : khodijah_fitri@uin-suska.ac.id , lenitri_lestari@yahoo.com

ABSTRAK

Sistem Persamaan Linear (SPL) merupakan sistem persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan linear. SPL ada beberapa bentuk, SPL riil dan SPL kompleks. Tujuan dari SPL untuk mendapatkan solusi yang memenuhi persamaan yang diberikan. Metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel merupakan salah satu metode yang banyak digunakan untuk memecahkan masalah pada sistem persamaan linear. Penelitian ini menyelesaikan SPL kompleks yang berukuran empat persamaan dan empat variabel dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel. Syarat SPL dapat diselesaikan oleh metode tersebut memenuhi *Strictlly Diagonally Dominant* (SDD), bersifat simetris dan definit positif. Berdasarkan hasil yang diperoleh bahwa SPL kompleks dapat diselesaikan dengan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel.

Katakunci : *Generalisasi Gauss-Seidel, Metode Gauss-Seidel, Sistem Persamaan Linear Kompleks, Strictlly Diagonally Dominant.*

ABSTRACT

The System of linear Equations (SPL) is an equation system consisting of two or more linear equations. Gauss-Seidel method and generalized Gauss-Seidel is one of many methods used to solve problems in the system of linear equations. In this final task, the author completed a complex system of linear equation of four equation and four variable using Gauss-Seidel method and generalized Gauss-Seidel. The terms of SPL can be solved by such methods is Strictlly Diagonally Dominant (SDD), positive symmetric and positive definite. Based on the results that SPL complex can be solved by the Gauss-Seidel methods and generalized Gauss-Seidel.

Keywords: *Generalized Gauss-Seidel, Gauss-Seidel Methods, Complex Systems of Linear Equations, Strictlly Diagonally Dominant.*

Pendahuluan

Penelitian Davod Khojasteh salkuyeh pada Tahun 2007 dengan judul *"Generalized Jacobi and Gauss-Seidel methods for Solving Linear System of Equations"* yang membahas tentang sistem persamaan linear dengan $Ax = b$, dengan A matriks non singular dan entri diagonalnya tidak nol maka matriks A diberi pemisah yaitu:

$$A = D - E - F \tag{1}$$

dengan D adalah matriks diagonal dari A, E matriks segitiga bawah dari A, dan F adalah matriks segitiga atas dari A. Maka definisi dari metode Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \tag{2}$$

Dengan syarat A adalah matriks simetris.

Lisa Marlena menyelesaikan tulisannya Pada Tahun 2014 dengan judul "*Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Non Linear Menggunakan Metode Titik Tetap dan Metode Gauss-Seidel*.

Selanjutnya, pada Tahun 2014 Andri Ramadhan, dkk melakukan kajian ulang dari penelitian-penelitian sebelumnya dengan judul "*Generalisasi Metode Gauss-Seidel untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear"*. Kajian yang dilakukan oleh Andri Ramadhan hanya fokus untuk menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear dalam bentuk riil dengan menggunakan metode Gauss-Seidel serta generalisasinya yang akan diberikan contoh.

Adapun bentuk generalisasi metode Gauss-Seidel yang dimaksud penulis adalah :

$$A = D_m - E_m - F_m \tag{3}$$

dengan

$$D_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ a_{m+1,1} & & \ddots & & a_{n-m,n} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n-m} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dan

$$E_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{m+2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n-m-1,n} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_{1,m+2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $m \in \{1,2,\dots n-1\}$untuk $\forall\ i,j = 1,2,\dots n$.

Generalisasi Gauss-Seidel untuk Persamaan (3) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$x^{(k+1)} = (D_m - E_m)^{-1} F_m x^{(k)} + (D_m - E_m)^{-1} b \tag{4}$$

Berdasarkan tulisan-tulisan tersebut yang membahas pada sistem persamaan linear dengan bilangan riil, sistem persamaan non linear, maka penulis tertarik untuk membuat beberapa contoh kasus menggunakan metode yang sama dengan menggunakan sistem persamaan linear kompleks.

Bahan dan Metode Penelitian

Berikut langkah-langkah metodologi penelitian untuk penyelesaian sistem persamaan linier kompleks dengan invers matriks menggunakan metode Faddeev adalah sebagai berikut:

1. Diberikan sistem persamaan linear kompleks.
2. Mengubah sistem persamaan linear kompleks dalam bentuk persamaan matriks $Ax = b$
3. Memeriksa apakah matriks A memenuhi syarat untuk diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Saidel dan generalisasi Gauss-Saidel, yaitu matriks A bersifat non singular, *Strictly Dioganally Dominant* (*SDD*) dan bersifat simetris. Jika A tidak memenuhi syarat sesuai definisi maka SPL tidak dapat diselesaikan dengan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel.
4. Penyelesaian SPL kompleks dengan metode Gauss-Seidel

a. Menjabarkan matriks *D*, *E*, *F* pada metode Gauss-Seidel.
b. Kemudian mendapatkan bentuk matriks $(D-E)^{-1}, (D-E)^{-1}F$ dan $(D-E)^{-1}b.$ Serta diberikan tebakan awal $x^0 = [0,0,0,0]^T$.
c. Menggunakan persamaan metode Gauss-Seidel $x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$ untuk melakukan iterasi.
d. Setelah dilakukan iterasi hingga $\left\| x_i^n - x_i^{n-1} \right\| < 0{,}0002$, maka iterasi dihentikan.

5. Penyelesaian SPL kompleks dengan Generalisasi Gauss-Seidel
Adapun langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan SPL kompleks pada generalisasi Gauss-Seidel untuk $m = 1,2,...n-1$ yaitu :
a. Menjabarkan matriks D_m, E_m, F_m ,pada generalisasi Gauss-Seidel.
b. Kemudian mendapatkan bentuk matriks $(D_m - E_m)^{-1}, (D_m - E_m)^{-1}F_m$ dan $(D_m - E_m)^{-1}b.$ Serta diberikan tebakan awal $x^0 = [0,0,0,0]^T$.
c. Menggunakan persamaan generalisasi Gauss-Seidel $x^{(k+1)} = (D_m - E_m)^{-1}F_m x^{(k)} + (D_m - E_m)^{-1}b$ untuk melakukan iterasi.
d. Setelah dilakukan iterasi hingga $\left\| x_i^n - x_i^{n-1} \right\| < 0{,}0002$, maka iterasi dihentikan.

Hasil dan Pembahasan

Pembahasan yang dilakukan pada penelitian ini adalah memberikan contoh kasus untuk penyelesaian SPL kompleks yang sesuai dengan metodologi penelitian.

Contoh:

Diberikan sitem persamaan linier kompleks empat persamaan dan empat variabel sebagai berikut dan akan diselesaikan dengan metode Gauss-Siedel dan generalisasi Gauss-Siedel.

$$(10+4i)x_1 + (1-i)x_2 + (-2+3i)x_3 + (2+2i)x_4 = 6+2i$$
$$(1-i)x_1 + (10+4i)x_2 + (1+i)x_3 + (2-2i)x4 = 3-i$$
$$(-2+3i)x_1 + (1+i)x_2 + (10+4i)x_3 + (-2+3i)x_4 = -4-3i$$
$$(2+2i)x_1 + (2-2i)x_2 + (-2+3i)x_3 + (10+4i)x_4 = -7+5i$$

Sistem persamaan linear diatas dapat ditulis dalam bentuk $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6+2i \\ 3-i \\ -4-3i \\ -7+5i \end{bmatrix}$$

Akan diperiksa apakah matriks *A* memenuhi syarat untuk diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel.

1. Matriks *A* non singular

Akan diperiksa matriks *A* bersifat singular atau non singular dengan mencari determinan matriksnya.

$$A = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}$$

$\det A = 48 + 15842i$

Berdasarkan hasil yang diperoleh, maka dapat disimpulkan bahwa matriks *A* bersifat non singular. Terbukti bahwa $\det A \neq 0$.

2. Matriks *A* bersifat *Strictlly Diagonally Dominant* (*SDD*)

Akan diperiksa apakah matriks *A* bersifat *SDD*. *A* bersifat *SDD* jika memenuhi $|a_{ii}| > \sum_{j=1\, j\neq i}^{4} |a_{ij}|\ \forall i = 1,2,....4$

Berdasarkan matriks $A = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}$ maka diperoleh

$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|$

$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|$

$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|$

$|a_{44}| > |a_{41}| + |a_{41}| + |a_{43}|$

Berdasarkan hasil diatas bahwa matriks *A* bersifat *SDD*.

3. Matriks *A* bersifat Simetris

Matriks *A* bersifat simetris karena $A = A^T$, dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i = 1,2,...,n$ dan $j = 1,2,...,n$

$$A = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}$$

karena $A = A^T$. Sehingga maka matriks A memenuhi semua syarat untuk diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel.

a. Metode Gauss-Seidel:

Sistem persamaan linear diatas dapat ditulis dalam bentuk $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 6+2i \\ 3-i \\ -4-3i \\ -7+5i \end{bmatrix}$$

Akan dijabarkan matriks D, E dan F pada metode Gauss-Seidel, yaitu :

$$D = \begin{bmatrix} 10+4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10+4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10+4i \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 2-3i & -1-i & 0 & 0 \\ -2-2i & -2+2i & 2-3i & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1+i & 2-3i & -2-i \\ 0 & 0 & -1-i & -2+2i \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari $(D-E)^{-1}, (D-E)^{-1.}F,$ dan $(D-E)^{-1.}b$ dengan menggunakan program Maple 13.

$$(D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}08621-0{,}03448i & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0002973+0{,}01219i & 0{,}08621-0{,}03448i & 0 & 0 \\ -0{,}004684-0{,}03207i & -0{,}01219-0{,}0002973i & 0{,}08621-0{,}03448i & 0 \\ -0{,}03812-0{,}002605i & -0{,}001532+0{,}02835i & -0{,}005351-0{,}03062i & 0{,}08621-0{,}03448i \end{bmatrix}$$

$$(D-E)^{-1}.F = \begin{bmatrix} 0.-0,i & -0{,}052+0{,}12i & 0{,}070-0{,}33i & -0{,}24-0{,}10i \\ 0.+0,i & -0{,}012-0{,}012i & -0{,}085-0{,}027i & -0{,}075+0{,}22i \\ 0.-0.i & 0{,}037+0{,}027i & -0{,}098-0{,}038i & 0{,}040-0{,}28i \\ 0.+0,i & 0{,}041-0{,}035i & -0{,}054+0{,}084i & -0{,}082-0{,}024i \end{bmatrix}$$

$$(D-E)^{-1}.b = \begin{bmatrix} 0{,}58622-0{,}03446i \\ 0{,}19799-0{,}11710i \\ -0{,}44911-0{,}31120i \\ -0{,}70129+0{,}80565i \end{bmatrix}$$

Berikut hasil iterasi yang diperoleh menggunakan program Maple 13 dengan persamaan

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$$

Tabel 1 Iterasi Kasus Menggunakan Metode Gauss-Seidel

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	$0{,}5862-0{,}03446i$	$0{,}1980-0{,}1171i$	$-0{,}4491-0{,}3112i$	$-0{,}7013+0{,}8056i$
2	0,7048-0,00146i	0,09939-0,2942i	-0,2089-0,0340i	-0,5701+0,7237i
3	0,7997-0,05737i	0,0936-0,2859i	-0,2385-0,1195i	-0,6293+0,7287i
4	0,7834-0,05002i	0,0974-0,2913i	-0,2402-0,093i	-0,6155+0,7324i
5	0,7896-0,04907i	0,0962-0,2907i	-0,2371-0,0995i	-0,6187+0,7298i
6	0,7882-0,04982i	0,0966-0,2907i	-0,2386-0,0982i	-0,6181+0,7308i
7	0,7884-0,04949i	0,0966-0,2908i	-0,2381-0,0984i	-0,6182+0,7305i
8	0,7883-0,04957i	0,0966-0,2908i	-0,2383-0,0984i	-0,6182+0,7306i
9	0,7883-0,04950i	0,0966-0,2908i	-0,2383-0,0984i	-0,6182+0,7305i

Berdasarkan Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 9 kali, bahwa $\left\|x_i^{(9)}-x_i^{(8)}\right\|<0{,}0002, \forall i=1,2,3,4.$ Sehingga nilai x yang diperoleh :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7883-0{,}04950i \\ 0{,}0966-0{,}2908i \\ -0{,}2383-0{,}0984i \\ -0{,}6182+0{,}7305i \end{bmatrix}$$

b. Generalisasi Gauss-Seidel

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan generalisasi Gauss-Seidel, dapat dipilih nilai dari parameter $m \in \{1,2,3..,n-1\}$ sedemikian sehingga :

$$x^{(k+1)}=(D_m-E_m)^{-1}F_m x^{(k)}+(D_m-E_m)^{-1}b$$

untuk $m=1$

$$x^{(k+1)}=(D_1-E_1)^{-1}F_1 x^{(k)}+(D_1-E_1)^{-1}b$$

dengan

$$D_1=\begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & 0 & 0 \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 0 \\ 0 & 1+i & 10+4i & -2+3i \\ 0 & 0 & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}, E_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2-3i & 0 & 0 & 0 \\ -2-2i & -2+2i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-3i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 & -2+2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari $(D_1 - E_1)^{-1}, (D_1 - E_1)^{-1.} F_1,$ dan $(D_1 - E_1)^{-1.} b$ dengan menggunakan program Maple 13.

$$(D_1 - E_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}08442 - 0{,}03528i & -0{,}0001357 + 0{,}01208i & 0{,}0005267 - 0{,}001337i & -0{,}0004018 - 0{,}0002648i \\ -0{,}0002542 + 0{,}01488i & 0{,}08496 - 0{,}03529i & -0{,}01094 + 0{,}0003253i & -0{,}0006480 + 0{,}003607i \\ -0{,}007583 - 0{,}02051i & -0{,}0009249 + 0{,}001740i & 0{,}07695 - 0{,}03458i & -0{,}006019 - 0{,}02759i \\ -0{,}03484 - 0{,}0007482i & 0{,}001517 + 0{,}02168i & -0{,}005232 - 0{,}03000i & 0{,}07602 - 0{,}03484i \end{bmatrix}$$

$$(D_1 - E_1)^{-1}.F_1 = \begin{bmatrix} 0.+0,i & 0.+0,i & 0{,}06300 - 0{,}328i & -0{,}2633 - 0{,}1227i \\ 0.+0,i & 0.+0,i & 0{,}04413 + 0{,}03052i & -0{,}06907 + 0{,}2112i \\ 0.+0,i & 0.+0,i & -0{,}07670 - 0{,}01827i & -0{,}02748 + 0{,}05086i \\ 0.+0,i & 0.+i & -0{,}07192 + 0{,}1030i & 0{,}02179 + 0{,}03085i \end{bmatrix}$$

$$(D_1 - E_1)^{-1}.b = \begin{bmatrix} 0.58677 - 0{,}0028515i \\ 0{,}21954 - 0{,}099030i \\ -023697 - 0{,}06158i \\ -0{,}60832 + 0{,}74903i \end{bmatrix}$$

Berikut hasil iterasi yang diperoleh menggunakan program Maple 13.

Tabel 2 Iterasi Kasus Menggunakan Metode Gauss-Seidel *m*=1

N	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	$0{,}5868 - 0{,}029i$	$0{,}2195 - 0{,}0990i$	$-0{,}2370 - 0{,}0616i$	$-0{,}6083 + 0{,}7490i$
2	$0{,}8040 - 0{,}0526i$	$0{,}0947 - 0{,}2892i$	$-0{,}2413 - 0{,}1040i$	$-0{,}6213 + 0{,}7266i$
3	$0{,}7906 - 0{,}04637i$	$0{,}1015 - 0{,}2924i$	$-0{,}2403 - 0{,}1008i$	$-0{,}6162 + 0{,}7283i$
4	$0{,}7906 - 0{,}0476i$	$0{,}1007 - 0{,}2912i$	$-0{,}2405 - 0{,}1008i$	$-0{,}6165 + 0{,}7284i$
5	$0{,}7907 - 0{,}0474i$	$0{,}1007 - 0{,}2913i$	$-0{,}2405 - 0{,}1008i$	$-0{,}6165 + 0{,}7283i$
6	$0{,}7907 - 0{,}0474i$	$0{,}1007 - 0{,}2913i$	$-0{,}2405 - 0{,}1008i$	$-0{,}6165 + 0{,}7283i$

Berdasarkan Tabel 2 dapat disimpulkan bahwa proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 6 kali, bahwa $\left\| x_i^{(6)} - x_i^{(5)} \right\| < 0{,}0002, \forall i = 1{,}2{,}3{,}4.$ Sehingga nilai *x* yang diperoleh :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7907 - 0{,}0474i \\ 0{,}1008 - 0{,}2913i \\ -0{,}2405 - 0{,}1008i \\ -0{,}6165 + 0{,}7283i \end{bmatrix}$$

untuk $m = 2$

$$x^{(k+1)} = (D_2 - E_2)^{-1} F_2 x^{(k)} + (D_2 - E_2)^{-1.} b$$

dengan

$$D_2 = \begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 0 \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+41 & -2+3i \\ 0 & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2-2i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0-2-2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Selanjutnya akan dicari $(D_2 - E_2)^{-1}, (D_2 - E_2)^{-1.} F_2$, dan $(D_2 - E_2)^{-1.} b$ dengan menggunakan program Maple 13.

$$(D_2 - E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}07865 - 0{,}03337i & 0{,}0007807 + 0{,}01188i & -0{,}006071 - 0{,}02573i & -0{,}01180 - 0{,}0008258i \\ 0{,}002814 + 0{,}006295i & 0{,}07975 - 0{,}03676i & -0{,}001472 + 0{,}001157i & 0{,}0009005 + 0{,}02361i \\ -0{,}007310 - 0{,}01878i & -0{,}0007341 + 0{,}001587i & 0{,}07082 - 0{,}03325i & -0{,}06315 - 0{,}02584i \\ -0{,}03090 + 0{,}001047i & 0{,}002132 + 0{,}02045i & -0{,}007331 - 0{,}01913i & 0{,}07428 - 0{,}03500i \end{bmatrix}$$

$$(D_2 - E_2)^{-1}.F_2 = \begin{bmatrix} 0.+0,i & 0.+0.i & 0.+0,i & -0{,}22 - 0{,}092i \\ 0.+0,i & 0.+0,i & 0.+0,i & 0{,}0070 - 0{,}018i \\ 0.+0,i & 0.+0,i & 0.+0,i & -0{,}023 + 0{,}053i \\ 0.+0,i & 0.+0,i & 0.+0,i & 0{,}064 + 0{,}060i \end{bmatrix}$$

$$(D_2 - E_2)^{-1.} b = \begin{bmatrix} 0{,}5866 + 0{,}05978i \\ 0{,}0918 - 0{,}3076i \\ -0{,}2165 - 0{,}050i \\ -0{,}5337 + 0{,}7186i \end{bmatrix}$$

Berikut hasil iterasi menggunakan program Maple 13.

Tabel 3 Iterasi Kasus Menggunakan Generalisasi Gauss-Seidel *m*=2

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	$0{,}5866 + 0{,}05978i$	$0{,}0918 - 0{,}3076i$	$-02165 - 0{,}0520i$	$-0{,}5337 + 0{,}7186i$
2	$0{,}7701 - 0{,}04922i$	$0{,}1010 - 0{,}2930i$	$-0{,}2423 - 0{,}09681$	$-0{,}6110 + 0{,}7326i$
3	$0{,}7884 - 0{,}04522i$	$0{,}1007 - 0{,}2915i$	$-0{,}2413 - 0{,}1012i$	$-0{,}6168 + 0{,}7288i$

4	$0{,}7893-0{,}04382i$	$0{,}1006-0{,}2914i$	$-0{,}2409-0{,}1014i$	$-0{,}6169+0{,}7282i$
5	$0{,}7893-0{,}04362i$	$0{,}1006-0{,}2914i$	$-0{,}2409-0{,}1014i$	$-0{,}6169+0{,}7282i$
6	$0{,}7893-0{,}04362i$	$0{,}1006-0{,}2914i$	$-0{,}2409-0{,}1014i$	$-0{,}6169+0{,}7282i$

Berdasarkan Tabel 3 dapat disimpulkan bahwa proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 6 kali, bahwa $\left\|x_i^{(5)}-x_i^{(4)}\right\|<0{,}0002, \forall i=1{,}2{,}3{,}4.$ Sehingga nilai x yang diperoleh :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7893-0{,}04362i \\ 0{,}1006-0{,}2914i \\ -0{,}2409-0{,}1014i \\ -0{,}6169+0{,}7282i \end{bmatrix}$$

untuk $m=3$

$$x^{(k+1)}=(D_3-E_3)^{-1}F_3x^{(k)}+(D_3-E_3)^{-1.}b$$

dengan

$$D_3=\begin{bmatrix} 10+4i & 1-i & -2+3i & 2+2i \\ 1-i & 10+4i & 1+i & 2-2i \\ -2+3i & 1+i & 10+41 & -2+3i \\ 2+2i & 2-2i & -2+3i & 10+4i \end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, F_3=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

Selanjutnya akan dicari $(D_3-E_3)^{-1},(D_3-E_3)^{-1.}F_3,$ dan $(D_3-E_3)^{-1.}b$ dengan program Maple 13.

$$(D_3 - E_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}08594 - 0{,}03016i & 0{,}002567 + 0{,}006888i & -0{,}006503 - 0{,}02047i & -0{,}03295 - 0{,}0009836i \\ 0{,}002567 + 0{,}006888i & 0{,}08015 - 0{,}03662i & -0{,}001897 + 0{,},001130i & 0{,}0008805 + 0{,}02191i \\ -0{,}006503 - 0{,}02047i & -0{,}001897 + 0{,}001130i & 0{,}07206 - 0{,}03311i & -0{,}006502 - 0{,}02085i \\ -0{,}03295 - 0{,}0009836i & 0{,}0008805 + 0{,}02191i & -0{,}006502 - 0{,}02085i & 0{,}08140 - 0{,}03220i \end{bmatrix}$$

$$(D_3 - E_3)^{-1}.F_3 = \begin{bmatrix} 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i \\ 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i \\ 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i \\ 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i & 0. + 0{,}i \end{bmatrix}$$

$$(D_3 - E_3)^{-1}.b = \begin{bmatrix} 0{,}7908 - 0{,}0475i \\ 0{,}1007 - 0{,}2913i \\ -0{,}2404 - 0{,}1008i \\ -0{,}6165 + 0{,}7284i \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = (D_3 - E_3)^{-1} F_3 x^{(k)} + (D_3 - E_3)^{-1.} b$$
$$x^{(k+1)} = 0 + (D_3 - E_3)^{-1}.b$$
$$x^{(k+1)} = A^{-1}.b$$

karena $F_3 = 0$ sehingga nilai $(D_3 - E_3)^{-1} F_3 x^{(k)} = 0$ solusi dihasilkan tanpa proses iterasi. Sehingga nilai *x* yang diperoleh :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7908 - 0{,}0475i \\ 0{,}1007 - 0{,}2913i \\ -0{,}2404 - 0{,}1008i \\ -0{,}6165 + 0{,}7284i \end{bmatrix}$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat diperoleh kesimpulan, yaitu:

1. Penyelesaian SPL kompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan invers matriks menggunakan metode Gauss-Seidel dan generalisasi Gauss-Seidel.
2. Penyelesaian sistem persamaan linier kompleks dan Hermit pada penelitian ini merupakan contoh kasus untuk matriks ukuran 4×4 solusinya berupa bilangan kompleks.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard."*Aljabar Linear Elementer*", Edisi Ketiga. Jakarta : Penerbit Erlangga. 1985.

[2] Anton, Howard," *Dasar-dasar Aljabar Linear*", Edisi Ketujuh, Batam : Penerbit Interaksara. 2000.

[3] Anton, Howard. "*Elementary Linear Algebra",* Nine Edition. John Wiley, New York. 2010.

[4] Hadley, G. "*Aljabar Linear*", Jakarta : Penerbit Erlangga. 1983.

[5] Lipschutz, Seymour. "*Aljabar linear*", Edisi ketiga. Jakarta : Penerbit Erlangga. 2006.

[6] Marlena, Lisa. "Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Non Linear Menggunakan Metode Titik Tetap dan Metode Gauss-Seidel". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.* Pekanbaru. 2014.

[7] Nicholson, W. Keith. "*Elementary Linear Algebra*", First Edition McGraw-Hill, Singapore. 2001.

[8] Paliouras, Johan. D. "*Peubah Kompleks*". Surabaya : Penerbit Erlangga.1987.

[9] Ramadhan, Andri, dkk. "Generalisasi Metode Gauss-Seidel untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear". *JOM FMIPA Volume 1 No. 2 Oktober 2014* 2014.

[10] Salkuyeh, D.k. "Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for solving Linear Sistem of Equations". *Numerical Mathematics, A journal of Chinese Universities, 16 : 164-170.* 2007.

[11] Spiegel, Murray G. "*Peubah Kompleks*", Bandung : Penerbit Erlangga. 1964.