

Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan *Saturated Incidence Rate*

I. Suryani¹, Mela Yuenita.E²

^{1,2} Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: penulis1@uin-susk

ABSTRAK

Paper ini membahas tentang model MSEIR penyakit difteri dengan *saturated incidence rate*. Model MSEIR memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium ditentukan dengan memecahkan persamaan model MSEIR dan diuji kestabilannya dengan nilai eigen dan kriteria Routh-Hurwitz. Hasilnya diperoleh bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika $B < \mu^2$, artinya untuk waktu yang cukup lama penyakit difteri akan punah dari populasi. Dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal jika $\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} + \mu\right) > 2\delta M^*$, $\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1+\alpha_2 I^*} > \beta S^* \varepsilon$ dan $(\gamma + 2\mu + \varepsilon) > \left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}\right)$, artinya untuk waktu yang cukup lama penyakit difteri relatif ada di dalam populasi.

Kata Kunci: Stabil Asimtotik, Titik Ekuilibrium, Model MSEIR, Kriteria Routh-Hurwitz, Saturated Incidence Rate

ABSTRACT

This paper discusses about diphtheria disease used MSEIR model with saturated incidence rate. Model of MSEIR have two equilibriums that is disease-free equilibrium and disease-endemic equilibrium. Equilibrium is determined by solving the equations in the model MSEIR and tested stability with criteria eigenvalues and Routh-Hurwitz. The result obtained that disease-free equilibrium asymptotically local stable if $B < \mu^2$. This mean that for quite a long time diphtheria disease are extinct. And endemic equilibrium asymptotically local stable if $\left(\frac{\beta I^}{1+\alpha_2 I^*} + \mu\right) > 2\delta M^*$, $\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1+\alpha_2 I^*} > \beta S^* \varepsilon$ and $(\gamma + 2\mu + \varepsilon) > \left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}\right)$. This mean that for quite a long time diphtheria disease relatively are exist in population.*

Keywords: *Asymptotically stable, equilibrium state, MSEIR model, Routh-Hurwitz, saturated incidence rate.*

Pendahuluan

Penyakit difteri disebabkan oleh *corynebacterium diphtheriae* yang biasanya mempengaruhi selaput lendir dan tenggorokan. Penyakit ini banyak menyerang pada anak-anak. Pencegahan dalam penyebaran penyakit difteri selain dengan imunisasi juga tergantung terhadap kekebalan atau antibodi yang dimiliki oleh seseorang (Hull D & Johnston D I, 2008).

Untuk mengetahui apakah suatu penyakit menular dapat menjadi endemik atau tidak, beberapa model penyebaran penyakit baik model yang bersifat

deterministik maupun yang bersifat stokastik digunakan untuk mengujinya. Model-model tersebut memiliki karakteristik tersendiri. Salah satu model epidemik penyebaran penyakit adalah model SIR (*susceptible-infected-recovered*).

Penelitian model epidemik tentang penyebaran penyakit telah banyak dilakukan guna mencegah penyebaran penyakit menular, salah satunya adalah Wulandari (2013) menjelaskan tentang analisis model epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit difteri. Penelitian tentang model endemik juga dilakukan oleh Sarrayu (2010) menjelaskan tentang penyelesaian numerik dan analisis perilaku model SIR dengan vaksinasi untuk pencegahan penularan penyakit. Selanjutnya penelitian tentang model epidemik juga dilakukan oleh Sulisti dkk (2014) menjelaskan analisis kestabilan model dinamika penyebaran penyakit flu burung.

Ketiga penelitian diatas menggunakan laju infeksi bilinear βSI pada proses penularan individu *susceptible* menjadi individu *infected* dalam suatu populasi, sedangkan diketahui bahwa proses penularan suatu penyakit tidak hanya laju infeksi bilinear saja, ada juga laju infeksi jenuh (*saturated incidence rate*) $\frac{\beta SI}{1+\alpha_1 S}$ atau $\frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I}$, dengan $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ adalah efek dari faktor kejenuhan atau *crowded*, yaitu pada saat jumlah individu yang terinfeksi sangat banyak atau mencapai titik jenuh maka laju infeksi semakin menurun.

1. Model Matematika Penyakit Difteri dengan *Saturated Incidence Rate*

Populasi pada model MSEIR penyebaran penyakit difteri dengan *saturated incidence rate* dibagi menjadi lima kompartemen yaitu kompartemen populasi yang dilindungi dengan imun pasif (*maternal antibodies*), kompartemen populasi rentan (*susceptible*), kompartemen populasi laten (*exposed*), kompartemen populasi terinfeksi (*infected*) dan kompartemen populasi sembuh (*recovered*).

Berikut ini adalah model matematika penyebaran penyakit difteri dengan *saturated incidence rate*:

$$\frac{dM}{dt} = B - \delta MS - \mu M \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta MS - \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \mu S \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \varepsilon E - \mu E \tag{3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \gamma I - \mu I \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \tag{5}$$

$$B > 0, \delta > 0, \beta > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0, \alpha_2 > 0.$$

Pada Persamaan (1) menyatakan laju perubahan jumlah individu yang dilindungi oleh imun pasif. *Maternal antibodies* dapat berubah karena kehadiran anak-anak yang telah diimunisasi ke dalam populasi dimana diasumsikan bahwa proporsi B adalah individu yang telah diimunisasi terhadap penyakit difteri dan terlindungi oleh imun pasif. Kompartemen ini berkurang karena berakhirnya dari

masa efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif pada laju δ dan juga karena kematian alami μ .

Pada Persamaan (2) menyatakan laju perubahan jumlah individu yang rentan. Kompartemen *susceptible* meningkat karena adanya kehadiran dari individu-individu pada kompartemen yang dilindungi oleh imun sebagai akibat dari berakhirnya masa efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif pada laju δ . Populasi akan berkurang karena adanya laju infeksi jenuh (*saturated incidence rate*) $\frac{\beta}{1+\alpha_2 I}$ pada proses penularan, pada saat jumlah individu terinfeksi sangat banyak atau mencapai titik jenuh maka laju infeksi semakin menurun yaitu dengan adanya tindakan perlindungan terhadap individu yang terinfeksi α_2 . Populasi kompartemen *susceptible* juga berkurang karena angka kematian alami pada laju μ .

Pada Persamaan (3) menyatakan laju perubahan jumlah individu yang laten. Kompartemen *exposed* pada periode laten tumbuh dengan tingkat kejadian $\frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I}$. Kompartemen ini berkurang dengan angka kematian alami pada laju μ dan kontak dengan individu yang ada pada periode laten menjadi terinfeksi difteri pada tingkat ε .

Pada Persamaan (4) menyatakan laju perubahan jumlah individu yang terinfeksi penyakit. Kompartemen pada populasi *infected* meningkat karena individu pada kompartemen populasi laten menjadi individu terinfeksi difteri dengan laju ε . Kompartemen ini berkurang karena angka kematian alami pada laju μ dan keberhasilan pengobatan pada pasien yang terinfeksi difteri pada laju γ .

Pada Persamaan (5) menyatakan laju perubahan jumlah individu yang sembuh. Kompartemen pada populasi *recovered* meningkat dengan keberhasilan pengobatan pada pasien difteri dengan laju γ dan berkurang karena kematian alami dengan laju μ .

Adapun asumsi-asumsi yang diberikan pada model yaitu sebagai berikut:

- a. Populasi bersifat tertutup, artinya tidak terjadi migrasi pada populasi.
- b. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
- c. Jumlah populasi konstan.
- d. Laju kematian alami untuk tiap kompartemen μ .
- e. Laju kelahiran populasi yang dilindungi oleh imun B .
- f. Laju transisi dari kompartemen *maternal antibodi* ke *susceptible* sebesar δ .
- g. Laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *exposed* β .
- h. Laju transisi dari kompartemen *exposed* ke *infected* ε .
- i. Laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered* γ .
- j. Laju infeksi jenuh pada proses penularan individu dari kompartemen *susceptible* ke *exposed* $\frac{\beta}{1+\alpha_2 I}$.

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan sistem persamaan diferensial:

$$\dot{x} = f(x),$$

(6)

dengan $\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, dan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Sistem Persamaan Diferensial (6) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

Secara umum, matriks transformasi terhadap basis standar, turunan fungsi sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

di titik \mathbf{x} adalah:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

yaitu matriks yang berukuran $m \times n$. Matriks ini sering kali juga ditulis sebagai matriks \mathbf{x} :

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j} \quad (8)$$

dan disebut matriks Jacobian.

2.2 Nilai Eigen

Definisi 1 (Anton, 1987) Jika \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol \mathbf{x} di dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari \mathbf{A} jika $\mathbf{A}\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{x} yakni:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (9)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari \mathbf{A} dan \mathbf{x} dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

2.3 Ekuilibrium dan Kestabilan

Titik ekuilibrium merupakan solusi yang tetap konstan untuk waktu yang cukup lama. Titik ekuilibrium ini didapat jika $\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \dots, \frac{dx_n}{dt} = 0$

Definisi 2 (Strogatz, 1994) Misalkan diberikan SPD linier sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (10)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Maka persamaan karakteristik SPD di atas, yaitu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, dapat ditulis menjadi:

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (11)$$

maka dari persamaan di atas diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}. \quad (12)$$

Analisis kestabilan dilakukan untuk setiap nilai eigen yang diperoleh pada Persamaan (12), sehingga terdapat tiga kasus yang bergantung pada nilai $D = b^2 - 4ac$.

Kasus 1 $D > 0$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

Pada kasus ini kestabilan titik tetap mempunyai tiga sifat, yaitu:

- i. Jika nilai eigen negatif ($\lambda_1 < 0$) dan ($\lambda_2 < 0$) maka titik tetap bersifat simpul stabil.
- ii. Jika nilai eigen positif ($\lambda_1 > 0$) dan ($\lambda_2 > 0$) maka titik tetap bersifat simpul tidak stabil.
- iii. Jika nilai eigen positif dan negatif ($\lambda_1 > 0$) dan ($\lambda_2 < 0$) maka titik tetap bersifat sadel.

Kasus 2 $D = 0$, $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$.

- i. Jika nilai eigen negatif ($\lambda_1 < 0$) dan ($\lambda_2 < 0$) maka titik tetap bersifat stabil.
- ii. Jika nilai eigen positif ($\lambda_1 > 0$) dan ($\lambda_2 > 0$) maka titik tetap bersifat tidak stabil.

Kasus 3 $D < 0$, $(\lambda_{1,2} = a \pm ib)$.

- i. Jika nilai $a > 0$ (bagian realnya positif) maka titik tetap bersifat spiral tak stabil.
- ii. Jika nilai $a < 0$ (bagian real negatif) maka titik tetap bersifat spiral stabil.
- iii. Jika nilai $a = 0$ nilai eigen merupakan imajiner murni, maka titik tetap bersifat selalu stabil.

2.4 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Teorema 1 (Risya Radhianti, 2012) Diberikan persamaan karakteristik:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0. \quad (13)$$

Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk $k=2,3,4$, disebut bahwa titik kesetimbangan stabil jika dan hanya jika:

$$k = 2 \quad a_1 > 0, a_2 > 0,$$

$$k = 3 \quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3,$$

$$k = 4 \quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4.$$

Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal.

Hasil dan Pembahasan

Model matematika pada Persamaan (1) – (5) diperoleh 2 titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh: $(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ sedangkan titik ekuilibrium endemik diperoleh:

$$(M^*, S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{B\beta\varepsilon}{\delta[(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)] + \mu\beta\varepsilon}, \frac{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)}{\beta\varepsilon}, \frac{(\gamma+\mu)I^*}{\varepsilon}, \right. \\ \left. (1+\alpha_2 I^*)\delta B\beta\varepsilon - \mu\delta\varepsilon + \mu\gamma + \mu(1+\alpha_2 I^*) + \mu\beta\varepsilon\beta\delta\varepsilon + \mu\gamma + \mu(1+\alpha_2 I^*) + \mu\beta\varepsilon \right).$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan pada setiap titik ekuilibrium tersebut dengan memasukkan titik ekuilibrium ke dalam matriks Jacobian, sehingga untuk kedua titik ekuilibrium tersebut diperoleh matriks Jacobiannya sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\delta S - \mu & -\delta M & 0 & 0 \\ \delta S & \delta M - \frac{\beta I}{1 + \alpha_2 I} - \mu & 0 & -\frac{\beta S}{1 + \alpha_2 I} + \frac{\beta S \alpha_2 I}{(1 + \alpha_2 I)^2} \\ 0 & \frac{\beta I}{1 + \alpha_2 I} & -\varepsilon - \mu & \frac{\beta S}{1 + \alpha_2 I} - \frac{\beta S \alpha_2 I}{(1 + \alpha_2 I)^2} \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Untuk menguji kestabilan dari titik ekuilibriumnya dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks jacobian.

Teorem 2. Jika $\delta B < \mu^2$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Nilai eigen dari matriks jacobian untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= \delta \left(\frac{B}{\mu} \right) - \mu, \\ \lambda_3 &= -(\varepsilon + \mu), \\ \lambda_4 &= -(\gamma + \mu). \end{aligned}$$

Pada nilai eigen λ_2 akan ditunjukkan $\delta \left(\frac{B}{\mu} \right) - \mu < 0$, oleh karena $\delta B < \mu^2$, maka terbukti bahwa $\lambda_2 < 0$.

Dengan demikian dari nilai eigen di atas di dapat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 bernilai real negatif. Sehingga terpenuhi $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$, berdasarkan Definisi 2, maka titik ekuilibrium bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal.

Teorema 3. Jika $\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} + \mu \right) > 2\delta M^*$, $\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1+\alpha_2 I^*} > \beta S^* \varepsilon$ dan $(\gamma + 2\mu + \varepsilon) > \left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} \right)$ maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.

Bukti:

Nilai eigen pada titik ekuilibrium endemik yaitu:

$$\lambda_1 = -(\delta S^* + \mu)$$

dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2 \left((\gamma + 2\mu + \varepsilon) - \delta M^* + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) \right) \\ & + \lambda \left([(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] - \delta M^*(\gamma + 2\mu + \varepsilon) \right. \\ & + \left. \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) (\gamma + 2\mu + \varepsilon) - \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \right) \\ & + \left(-\delta M^* [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] \right. \\ & - \left. \left(\frac{\beta S^*}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^*}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \left(\frac{\beta I^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} \right) \right) \\ & + \delta M^* \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \\ & - \left. \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) \right) \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= (\gamma + 2\mu + \varepsilon) - \delta M^* + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) \\ a_2 &= [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] - \delta M^*(\gamma + 2\mu + \varepsilon) \\ & + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) (\gamma + 2\mu + \varepsilon) \\ & - \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \\ a_3 &= -\delta M^* [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] - \\ & \left(\frac{\beta S^*}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^*}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \left(\frac{\beta I^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} \right) + \delta M^* \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) - \\ & \left(\frac{\beta S^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{(1 + \alpha_2 I^*)^2} \right) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right). \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurtwitz, nilai λ_2 , λ_3 dan λ_4 akan bernilai negatif jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$

$$\begin{aligned} & \text{Terlihat bahwa } a_1 = (\gamma + 2\mu + \varepsilon) + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) - \delta M^* > 0, a_3 = \\ & \left[\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \beta S^* \varepsilon \right] \left[\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} - \delta M^* + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu \right) \right] + \left(-\delta M^* + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \right. \\ & \left. \mu \right) [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] \text{ dan } a_1 a_2 > a_3 \text{ atau } a_1 a_2 - a_3 = \{(\gamma + 2\mu + \varepsilon)\} \left\{ [(\varepsilon + \right. \\ & \left. \mu)(\gamma + \mu)] + (\delta M^*)^2 + [(\gamma + 2\mu + \varepsilon) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu - \delta M^* \right)] + \left[\left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \mu \right) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} + \mu - 2\delta M^* \right) \right] \left. \right\} + \left[\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1 + \alpha_2 I^*} - \beta S^* \varepsilon \right] \left[[(\gamma + 2\mu + \varepsilon)] - \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*} \right) \right] > 0 \end{aligned}$$

sudah terbukti pada teorema 2. Sehingga diperoleh nilai eigen bernilai negatif, yang berarti bahwa titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal.

Simulasi Numerik

Pada pembahasan berikutnya, model matematika penyebaran penyakit difteri akan dianalisis secara numerik dengan program Maple. Dengan memasukkan nilai parameter yang sudah ditentukan. Pada simulasi mengambil dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

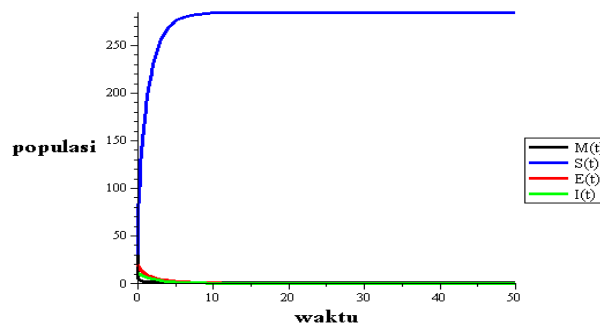
Berikut ini simulasinya:

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Tabel 1 Nilai Parameter pada Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
B	200
δ	0.6
μ	0.7
β	0.004
ε	0.3
γ	0.2
α_2	0.01

Dimisalkan nilai awal: $M(0) = 40$, $S(0) = 30$, $E(0) = 20$, dan $I(0) = 10$. sehingga dinamika populasi bebas penyakit dapat dilihat pada gambar berikut ini :



Grafik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa populasi M mengalami penurunan karena berakhirnya masa efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif dan adanya kematian alami, sementara pada populasi S terjadi peningkatan karena adanya individu yang lahir dan berakhirnya efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif pada populasi M dan masuk ke dalam kompartemen S . Selain itu peningkatan pada kompartemen S juga disebabkan oleh berkurangnya populasi pada kompartemen I . Sementara itu populasi pada kompartemen E terus turun menuju angka nol. Penurunan populasi pada kompartemen E disebabkan karena adanya kematian alami dan laju perubahan individu yang terjangkit menjadi terinfeksi. Sementara itu populasi pada kompartemen I mengalami penurunan secara signifikan menuju nol yang disebabkan karena populasi berada dalam

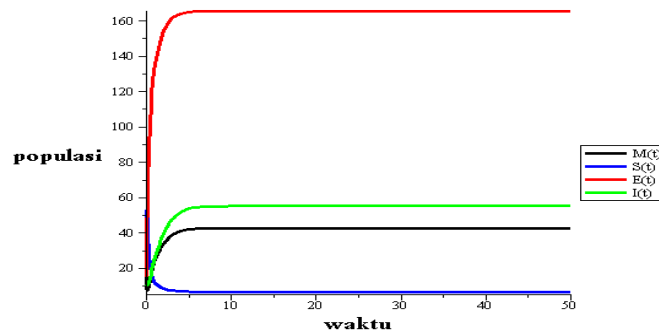
kondisi bebas penyakit sehingga penyakit tidak dapat bertahan didalam populasi, artinya dalam waktu tertentu individu yang terinfeksi berkurang dan akan hilang dari populasi.

b. Titik Ekuilibrium Endemik

Tabel 2 Nilai Parameter pada Titik Ekuilibrium Endemik

Parameter	Nilai Parameter
B	200
δ	0.6
μ	0.7
β	0.7
ε	0.3
γ	0.2
α_2	0.01

Dimisalkan nilai awal: $M(0) = 50$, $S(0) = 25$, $E(0) = 15$, dan $I(0) = 10$ sehingga dinamika populasi endemik penyakit dapat dilihat pada gambar berikut ini :



Grafik Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa populasi M mengalami peningkatan yang disebabkan oleh adanya populasi yang memiliki daya kekebalan tubuh dan imun pasif. Populasi S mengalami penurunan karena adanya kontak dengan individu *infected* dan terjadinya kematian alami. Sementara populasi *exposed* dan *infected* mengalami kenaikan yang mengakibatkan jumlah individu yang terinfeksi bertambah dan tidak pernah hilang karena populasi berada dalam kondisi endemik.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

- a. Model MSEIR penyebaran penyakit difteri dengan *saturated incidence rate*:

$$\frac{dM}{dt} = B - \delta MS - \mu M$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta MS - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_2 I} - \mu S$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \varepsilon E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R,\end{aligned}$$

dengan jumlah populasi keseluruhan $M + S + E + I + R = N$, dimana M adalah kompartemen *maternal antibodies* (populasi yang dilindungi oleh imun pasif), S adalah kompartemen *susceptible* (populasi yang rentan terhadap penyakit), E adalah kompartemen *exposed* (populasi yang terinfeksi, tetapi tidak mampu menyebarkan penyakit kepada individu lain), I adalah kompartemen *infected* (populasi yang terinfeksi dan mampu menyebarkan penyakit kepada individu lain), dan R adalah kompartemen *recovered* (populasi yang sembuh).

b. Ada dua titik ekuilibrium pada model MSEIR dengan *saturated incidence rate* yaitu:

1) Titik ekuilibrium bebas penyakit $(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right)$.

2) Titik ekuilibrium endemik

$$(M^*, S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{B\beta\varepsilon}{\delta[(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)] + \mu\beta\varepsilon}, \frac{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)}{\beta\varepsilon}, \frac{(\gamma+\mu)I^*}{\varepsilon}, \frac{(1+\alpha_2 I^*)(\delta B\beta\varepsilon - \mu(\delta[(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)] + \mu\beta\varepsilon))}{\beta(\delta[(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(1+\alpha_2 I^*)] + \mu\beta\varepsilon)} \right)$$

c. Ada dua kestabilan titik ekuilibrium pada model MSEIR yaitu kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan kestabilan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $\delta B < \mu^2$, maka nilai parameter bernilai real negatif, sehingga $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$, berarti dalam waktu yang lama penyakit akan hilang dari populasi, dan titik ekuilibrium endemik akan stabil asimtotik lokal jika $\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} + \mu\right) > 2\delta M^*$, $\frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \varepsilon}{1+\alpha_2 I^*} > \beta S^* \varepsilon$ dan $(\gamma + 2\mu + \varepsilon) > \left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}\right)$, berarti dalam waktu yang lama penyakit akan relatif ada dalam populasi.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi 5. Jakarta: Erlangga.
 [2] Hull, D & Johnston, D. I., 2008. *Dasar-Dasar Pediatri*. Edisi 3. Jakarta: EGC.
 [3] Juli Iswanto, Ripno., 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
 [4] Momoh. A. A, Ibrahim, M. O, & Madu. B. A., 2011. *Stability of an Disease Free Equilibrium of Hepatitis B Model*. Nigeria: Departement of Mathematics Usmanu Danfadiyo University.
 [5] Radhianti, Risya., 2012. *Simulasi dan Analisa Kestabilan Model Matematika Mengenai Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia*. Bandung: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Gunung Djati.
 [6] Roni, T. P., 2011. *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemic SEIR dengan Kemampuan Infeksi pada Periode Laten, Infeksi dan Sembuh*. Padang: Politeknik Negeri Padang.

- [7] Sarrayu, E. A., 2010. *Penyelesaian Numerik dan Analisis Perilaku SIR dengan Vaksinasi untuk Pencegahan Penularan Penyakit (Numerical Solution and Behavior Analytical of SIR Epidemic Model with Vaccination to Prevent Contagious Disease)*. Surabaya: FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November.
- [8] Strogartz SH., 1994. *Nonlinier Dynamics and Chaos with Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books:New York.
- [9] Sulisti, Hidayu, dkk., 2014. *Analisis Kestabilan Dinamika Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung*. Buletin Ilmiah. 3(3): 235-244.
- [10] Wartono., 2009. *Persamaan Diferensial Biasa dan Masalah Nilai Awal*. UIN Sultan Syarif Kasim. Riau: Suska Press.
- [11] Wulandari, U. N., 2013. *Analisis Model Epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit Difteri*. Jember :FMIPA Universitas Jember.