Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Pengembangan Teorema Napoleon Pada Jajaran Genjang Untuk Kasus Mengarah Ke Luar

[1]Chitra Valentika, [2]Mashadi, [3]Sri Gemawati
[1]Mahasiswa Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau
Jl. Pandau permai, C 42 No 13, Kampar, Riau, 28452
[1]Email: chitra.valentika@yahoo.com
[2,3]DosenJurusanMatematika, FMIPA, Universitas Riau
Jl. Binawidya KM 12,5 Simpang Baru, Pekanbaru, Riau, 28293
[2]Email: mash_mat@unri.ac.id
[3]Email: gemawati.sri@gmail.com

ABSTRAK

Dalam tulisan ini akan dibahas Teorema Napoleon pada segiempat jajaran genjang untuk kasus persegi yang dibangun mengarah ke luar. Pembuktian pada Teorema Napoleon ini akan dibuktikan dengan menggunakan pendekatan kekongruenan. Pada bagian akhir dibahas pengembangan Teorema Napoleon dengan konsep garis sejajar yang berpotongan.

Kata Kunci: Teorema Napoleon, jajaran genjang, persegi, konsep garis sejajar, kekongruenan.

ABSTRACT

In this paper will discuss theorem Napoleon at quadrilateral parallelogram to case square built lead to outside. Provides proofs using Congruen. At the end discussed development of Napoleon's theorem on quadrilateral with copcept of parallel lines which intersecting.

Keywords: *Napoleon's theorem, parallelogram, square, copcept of parallel lines, congruence.*

Pendahuluan

Teorema Napoleon pada segitiga dikemukakan oleh seorang tokoh yang bernama Napoleon Bonaparte (1769-1821) dia adalah seorang kaisar Perancis dan tokoh matematika dalam bidang geometri [5]. Teorema Napoleon pada segitiga tersebut adalah jika segitiga sama sisi dibangun pada setiap sisi segitiga sebarang mengarah ke luar [3, h.84].. Selanjutnya pada setiap segitiga sama sisi tersebut terdapat titik pusat yang merupakan titik sudut dari sebuah segitiga sama sisi yang baru [4, h.36]. Teorema Napoleon pada segitiga dapat dibuktikan dengan geometri [7] dan aljabar trigonometri [1 dan 6].

Selanjutnya menurut [2] menyatakan bahwa dengan menggunakan grafik excel, ditemukan bahwa persegi yang dikontruksi pada setiap sisi segiempat sebarang, kemudian keempat titik pusat persegi tersebut dihubungkan, maka dua titk pusat yang berlawanan terbentuk garis yang tegak lurus dan sama panjang. Setelah itu menurut [9] menyatakan bahwa dia mencoba beberapa segiempat seperti persegi, belah ketupat, persegi panjang, jajaran genjang dengan Teorema Van Aubel sehingga diperoleh ketika persegi dibangun pada setiap sisinya maka segmen garis dari titik pusat yang berlawanan tegak lurus dan sama panjang, tetapi untuk trapesium segment garis berpotongan tegak lurus tetapi sulit dibuktikan sama panjang. Setelah dilakukan percobaan pada segiempat dengan aplikasi Geogebra maka dalam artikel ini penulis membahas teorema Napoleon pada segiempat jajaran genjang.

Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan metode eksperimen dengan aplikasi Geogebra. Pembuktian teorema Napoleon dalam artikel ini yaitu dengan menggunakan pendekatan kekongruenan.

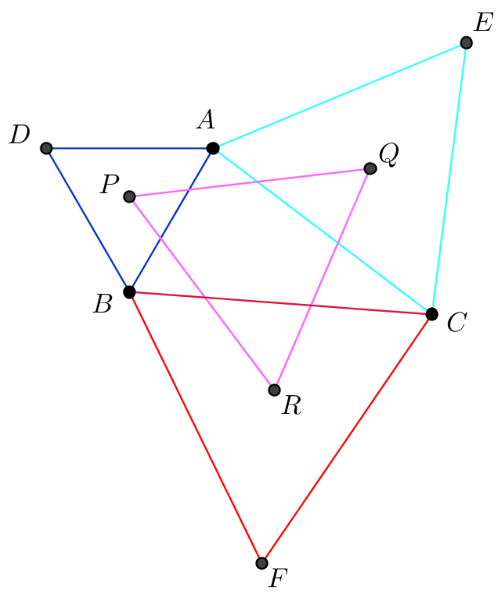
Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Hasil dan Pembahasan

1. Teorema Napoleon pada Segitiga

Teorema Napoleon pada segitiga adalah jika segitiga sama sisi dibangun pada setiap sisi segitiga sebarang mengarah ke luar. Selanjutnya pada setiap segitiga sama sisi tersebut terdapat titik pusat yang merupakan titik sudut dari sebuah segitiga sama sisi yang baru . Perhatikan Gambar 1, pada sisi AB dibangun segitiga sama sisi ΔABD, dan, pada sisi BC dibangun segitiga sama sisi ΔBCF, dan pada sisi AC dibangun segitiga sama sisi ΔACE, ketiga segitiga sama sisi tersebut dibangun mengarah ke luar [3, h.84]. Misalkan titik P, Q, dan R merupakan titik pusat segitiga sama sisi tersebut. Ketiga titik pusat tersebut membentuk segitiga sama sisi yang disebut segitiga Napoleon luar [10, h.36]. Berikut ini diberikan teorema Napoleon pada segitiga sebarang untuk kasus segitiga sama sisi yang dibangun mengarah ke luar.

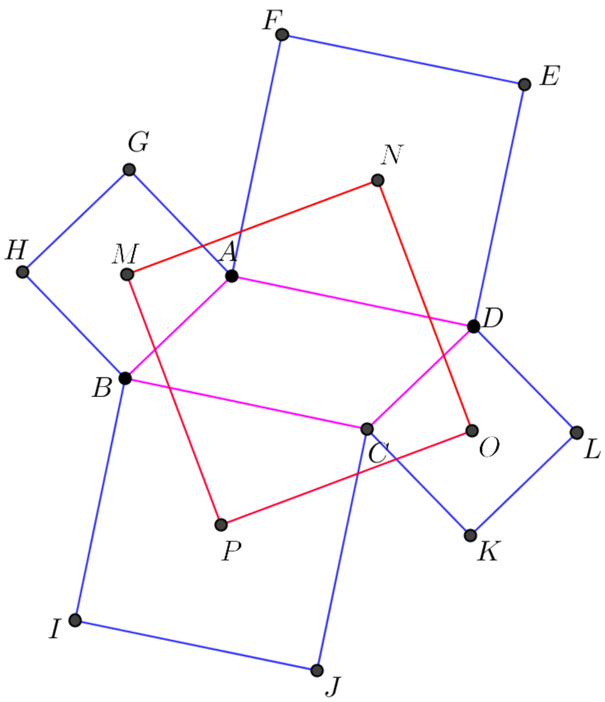
Teorema 1. Diberikan ΔABC adalah segitiga sebarang. Pada setiap sisi ΔABC di bangun segitiga sama sisi ΔABD, ΔACE, dan ΔBCF mengarah ke luar. Misalkan P, Q, dan R adalah masing-masing titik pusat dari segitiga sama sisi yang dibangun tersebut. Jika ketiga titik pusat tersebut dihubungkan maka terbentuk segitiga sama sisi ΔPQR.



Gambar 1. Teorema Napoleon pada segitiga untuk kasus segitiga mengarah ke luar

2. Teorema Napoloen pada Segiempat Jajaran Genjang.

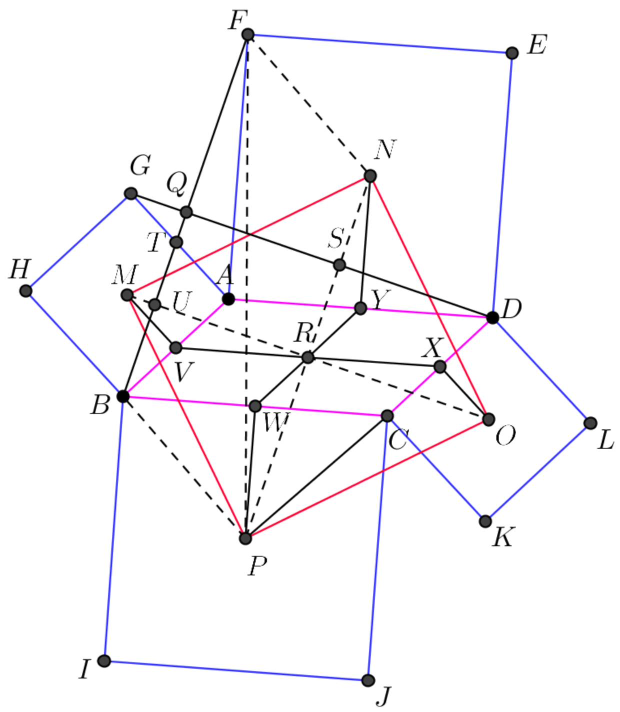
Pada artikel ini akan dibahas teorema Napoleon pada jajaran genjang untuk kasus persegi yang dibangun pada setiap sisi jajaran genjang mengarah ke luar. Jajaran genjang merupakan segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar [6]. Perhatikan Gambar 2, pada sisi AB dibangun persegi $ABHG$, pada sisi AD dibangun persegi $ADEF$, pada sisi CD dibangun persegi $CDKL$, dan pada sisi BC dibangun persegi $BCIJ$. Kemudian setiap persegi dibangun megarah ke luar. Selanjutnya setiap titik pusat persegi dihubungkan sehingga membentuk persegi yang disebut segiempat Napoleon luar. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 2



Gambar 2. Teorema Napoleon pada segiempat

Teorema 2. Diberikan segiempat yang berbentuk jajaran genjang *ABCD*. Pada setiap sisi jajaran genjang dibangun persegi *ABHG*, persegi *ADEF*, persegi *CDKL*, dan persegi *BCIJ* mengarah ke luar. Misalkan *M*, *N*, *O*, dan *P* adalah masing-masing titik pusat persegi yang dibangun mengarah ke luar. Jika keempat titik pusat tersebut dihubungkan maka membentuk persegi *MNOP* (Gambar 3).

Bukti. Untuk menunjukkan *MNOP* adalah persegi, maka akan dibuktikan $MN = NO$, dan $\angle PMN = 90^{o}$. Dari ΔGAD dan ΔBAF, diperoleh $AG = AB$, $\angle GAD = \angle FAB$, $AD = AF$, jadi $\Delta GAD \approx \Delta BAF$ [8, h.56]. Perhatikan ΔGQT dan ΔBAT pada Gambar 3, $\angle TGQ = \angle TBA$ dan $\angle GTQ = \angle BTA$, maka $\angle GQT = \angle BAT = 90^{o}$. Selanjutnya tarik Garis *NP* dan *MO* sehingga memotong di satu titik, katakan titik *R*. Misalkan titik *S* merupakan titik potong garis *NP* dan *GD*, sedangkan *U* merupakan titik potong garis *FB* dan *MO*. Akan di tunjukkan *BF* sejajar dengan *PN*. *FN* dan *BP* merupakan setengan diagonal persegi *ADFE* dan *BCIJ*, karena persegi *ADFE* dan *BCIJ* sejajar sehingga *FN* sejajar dengan *BP*. Kemudian tarik garis *FP* sehingga terdapat sudut yang bersebrangan yaitu $\angle BFP = \angle FPN$ dan $\angle BPF = \angle PFN$ yang menyebabkan *BF* juga sejajar dengan *PN*. Karena *BF* sejajar dengan *PN* maka $\angle GQT = \angle QSR = \angle MRN = 90^{o}$. Untuk lebih jelasNya perhatikan Gambar 3.



Gambar 3. Ilustrasi pembuktian teorema Napoleon pada segiempat

Misalkan *V*, *W*, *X*, dan *Y* merupakan titik tengah garis *AB*, *BC*, *CD*, dan *AD*. Dari Δ*MVR* dan Δ*NSR*, *MV* = *SR*, ∠*MVR*=∠*NSR*, *VR* = *NS*, maka Δ*MVR* ≈ Δ*NYR* pada Gambar 3, sehingga menyebabkan *MR* = *RN*. Karena *MR* = *RN* dan ∠*MRN* = 90^o, sehingga Δ*MRN* adalah segitiga sama kaki, begitu juga dengan Δ*RNO* yang menyebabkan ∠*MNR* = ∠*RNO*= 45^o. Maka diperoleh ∠*MNO*= 90^o, dengan cara yang sama diperoleh juga ∠*OPM* = ∠*NOP* = ∠*PMN* = 90^o. Dari Δ*MRP* dan Δ*NRO* pada, *MR*=*RO*, ∠*MRN*=∠*NRO*, *NR* = *NR*, maka Δ*MRP* ≈ Δ*NRO*. Sehingga meyebabkan *MN* = ON, kemudian dengan cara yang sama maka *MP* = *OP*. Sehingga jelas bahwa segiempat *MNOP* adalah persegi.

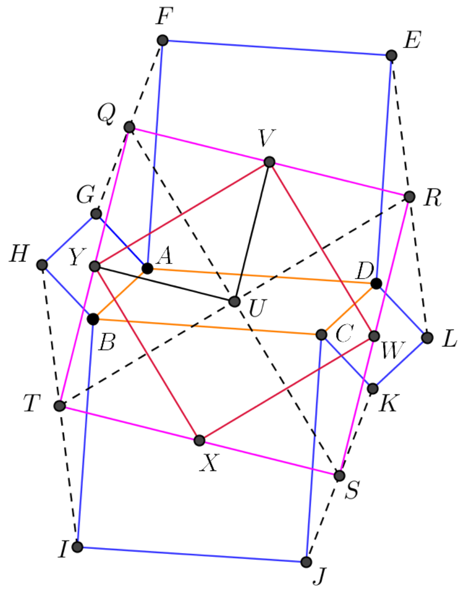
3. Pengembangan Teorema Napoleon pada Segiempat Jajaran Genjang

Pengembangan Teorema Napoleon pada segiempat dikembangkan berdasarkan Teorema Napoleon pada segiempat jajaran genjang untuk kasus persegi yang dibangun mengarah ke luar.

Teorema 3 Diberikan segiempat jajargenjang *ABCD*, dan pada setiap sisinya dibangun persegi mengarah keluar. Kemudian tarik garis *FG*, *EL*, *KJ*, dan *HI*. Misalkan titik *Q*, *R*, *S*, dan *T* adalah titik tengah dari keempat garis tersebut. Jika keempat titik tersebut dihubungkan maka terbentuk persegi *QRST*.

Bukti. Misalkan titik *Q*, *R*, *S*, dan *T* yang merupakan titik tengah garis *FG*, *EL*, *KJ*, dan *HI*. Untuk menunjukkan *QRST* adalah persegi maka akan dibuktikan *TQ* = *QR*, dan ∠*TQR* = 90^o. Perhatikan Gambar 4, tarik garis dari titik *Q* ke titik *S* dan titik *R* ke titik *Q*. Sehingga Garis *QS* dan garis *RQ* berpotongan di satu titik, katakan titik *U*. Sebelum menunjukkan *TQ* = *QR* maka akan di tunjukkan terlebih dahulu *UT* = *UR*. Perhatikan Gambar 4, *UY* = *UT*, *YT* = *VR* sehingga *UT* = *UR*. Kemudian Perhatikan Δ*QUT* dan Δ*QUR*, *UT* = *UR*, ∠*TUQ* = ∠*TUQ* dan *UQ* = *UQ* sehingga diperoleh *TQ*=*QR*. Dari Teorema 1, *VU* = *UY*, dan ∠*VUY* = 90^o, maka diperoleh juga ∠*QTR*=90^o, sehingga terbukti segiempat *QRST* adalah persegi.

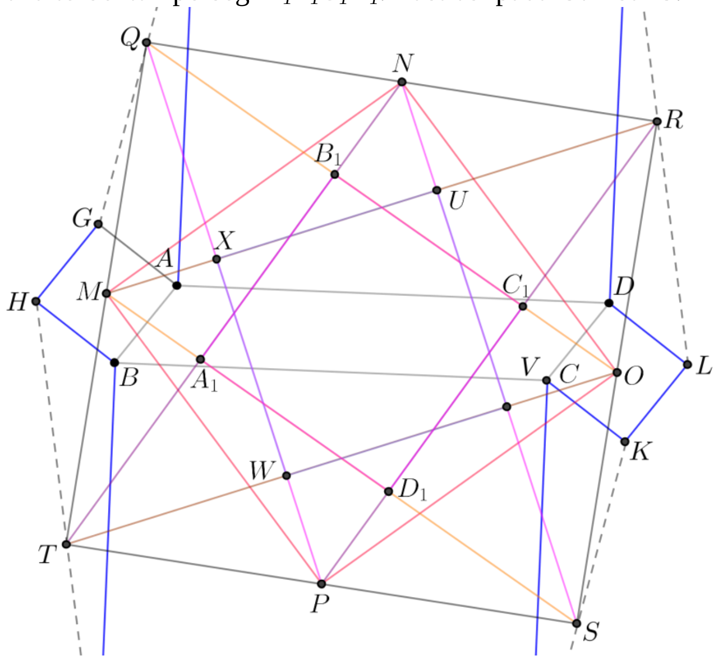
Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542



Gambar 4. Pengembangan teorema Napoleon pada segiempat

Kemudian diberikan beberapa akibat dari Teorema 1 dan Teorema 3, yaitu sebagai berikut

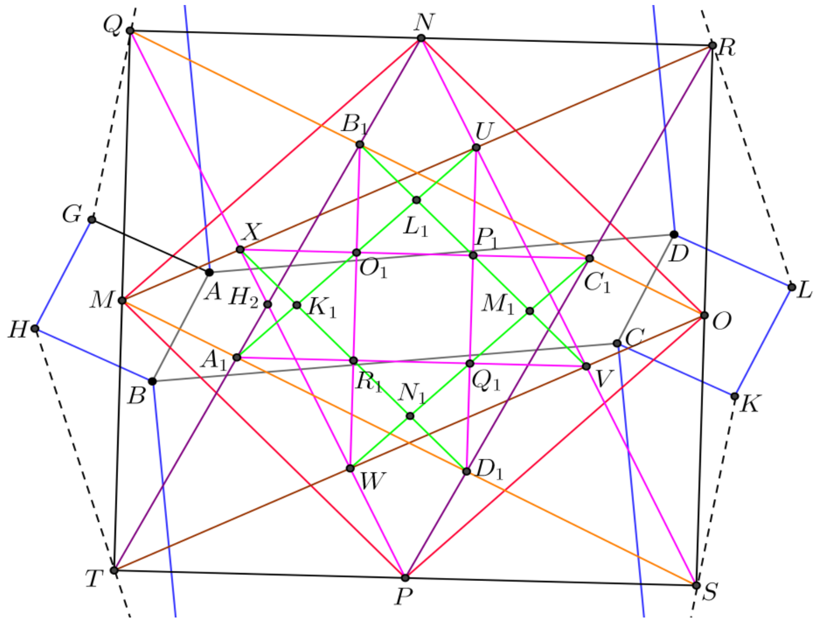
Akibat 1. Pada persegi *MNOP* dan *TQRS*, jika ditarik garis yang sejajar yaitu *PQ//SN* dan *MR//TO*, maka terbentuk persegi *VWZU*, dan Jika dibentuk garis yang sejajar *MS//QO* dan *TN//PR*, maka terbentuk persegi $A_1B_1C_1D_1$. Ilustrasi pada Gambar 5.



Gambar 5. Akibat 1 dari teorema Napoleon pada segiempat

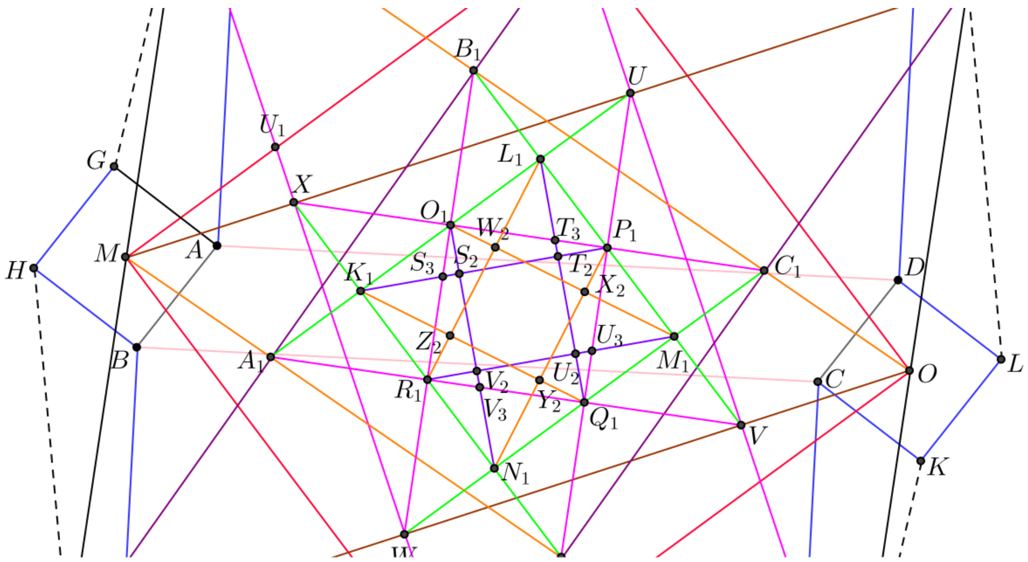
Akibat 2. Pada persegi *UVWX* dan $A_1B_1C_1D_1$, jika ditarik garis yang sejajar yaitu $UA_1//WC_1$ dan $XD_1//VB_1$, maka terbentuk persegi $K_1L_1M_1N_1$, dan jika dibentuk garis yang sejajar $VB_1//UD_1$ dan $ZC_1//WA_1$, maka terbentuk persegi $O_1P_1Q_1R_1$. Ilustrasi pada Gambar 6.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542



Gambar 6. Akibat 2 teorema Napoleon pada segiempat

Akibat 3. Pada persegi $K_1N_1M_1H_1$ dan $O_1P_1Q_1R_1$, jika ditarik garis yang sejajar yaitu K_1P_1// M_1R_1 dan N_1O_1// Q_1L_1, maka terbentuk persegi $S_2T_2U_2V_2$, dan jika dibentuk garis yang sejajar L_1R_1// N_1P_1 dan K_1Q_1// M_1O_1, maka terbentuk persegi $W_2X_2Y_2Z_2$. Ilustrasi pada Gambar 7.



Gambar 7. Akibat 3 teorema Napoleon pada segiempat

Kesimpulan

Setelah dilakukan beberapa percobaan Teorema Napoleon pada segiempat sehingga diperoleh Teorema Napoleon hanya berlaku untuk segiempat yang memliki dua pasang sisi sejajar seperti persegi, belah ketupat, persegi panjang, jajaran genjang. Teorema Napoleon pada jajaran untuk kasus mengarah ke luar yaitu jika persegi dibangun pada setiap sisinya maka keempat titik pusat persegi tersebut akan akan membentuk persegi yang disebut segiempat Napoleon luar. Pembuktian yang dilakukan dengan menggunakan konsep kekonruenan. Pengembangan Teorema Napoleon pada segiempat dapat dikembangkan dengan membentuk persegi dari perpotongan setiap garis yang sejajar sehingga membentuk persegi yang baru.

Daftar Pustaka

[1] Abed, J.A.H., A Proof of Napoleon's Theorem, *The general science journal*, (1),2009, pp. 1-4.

[2] Baker, J., Napoleon's Theorem and Beyond, *Spread Sheets in Educations (eJSiE)*, 1(4), 2009, pp. 1-12.

[3] Bredehoft, P., *Special Cases of Napoleon Triangles*, Master of Science, University of Central Missouri, 2014.

[4] Cartin, B.J.Mc., *Mysteries of the Equilateral Triangle*, Hikari Ltd, 2010.

[5] Georgiev, P., dan Mushkarov, O., Around Npoleon's Thorem, *Lifelong Learning Progamme* 1(28), 2010, pp.1-13.

[6] Jariah, N. A.A., *Pembuktian Teorema Napoleon dengan Pendekatan Trigonometri*, http://www.academia.edu/12025134/_Isi_NOVIKA_ANDRIANI_AJ_061210080186Oktober 2015.

[7] Lafleur, P., *Napoleon's Theorem*, Expository paper, http://www.Scimath.unl.edu/MIM/files/MATEexamFiles 24 November 2015.

[8] Mashadi, *Buku Ajar Geometri*, PUSBANGDIK UNRI, Pekanbaru, 2012.

[9] Nishiyama, Y., Beatiful Geometry As Van Aubel's Theorem, *Univ. Osaka, Dept. Business information*, 2(533), 2010, pp. 1-10.

[10] Venema, G.A., *Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geometer's Sketchpad*, Grand Rapids, Michigan, 2009.