Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Aplikasi Fungsi Diferensial Riccati Pada Sistem Dinamik Dua Kendali Waktu Berhingga

Nilwan Andiraja[1], Fiki Rakasiwi[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang persamaan linear kuadratik dengan dua kendali waktu berhingga. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan vektor kendali yang berkriteria Nash. Berdasarkan fungsi dinamik dan fungsi tujuan dibentuk persamaan Hamilton, persamaan *state*, persamaan *costate* dan persamaan stasioner. Selanjutynya dibentuk persamaan diferensial Riccati. Nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial Riccati. Solusi dari persamaan diferensial Riccati tersebut berfungsi untuk menghasilkan vektor kendali.

Kata Kunci: eigen, Hamilton, kuadratik, Riccati, State.

ABSTRACT

This research explain about linear quadratic equation with two scalar finite time control. The purpose of this research is to gain control function wich Nash criteria. Base on dynamic function and objective function be form Hamilton equations, state equations, costate equations and stasionary equations. Then be form diferential Riccati equations. Eigenvalues and eigenvektors are used to obtain the solution of diferential Riccati equation, the solution of differential Riccati equation is used generated the control function.

Keywords: *eigen, Hamilton, quadratic, Riccati, state.*

Pendahuluan

Persamaan diferensial memiliki peranan dalam menyelesaikan berbagai persoalan aplikasi matematika. Salah satu bentuk persamaan diferensial yaitu bentuk persamaan diferensial Riccati. Persamaan diferensial Riccati memiliki peran dalam membentuk vektor kendali pada sistem dinamik kendali. Solusi persamaan diferensial Riccati dapat dibentuk vektor kendali untuk mengoptimalkan sistem dinamik kendali. Salah satu vektor kendali yang baik yaitu vektor kendali dengan kriteria Nash. Sebab menurut Engwerda (2005) vektor kendali dengan kriteria Nash memberikan hasil vektor kendali yang lebih baik dibandingkan vektor kendali terdahulu atau minimal sama dengan vektor kendali terdahulu.

Beberapa peneliti telah membahas mengenai persamaan diferensial Ricaati diantaranya, Agus Indra Gunawan menggunakan solusi dari persamaan diferensial Riccati untuk menyelesaikan sistem kendali optimal pada motor DC. Muhammad Wakhid Musthofa (2011) meneliti tentang penerapan metode *sweep* pada permainan dinamis linier kuadaratik sistem *deskriptor*. Wakhid Musthofa (2011) menjabarkan persamaan dinamik dua kendali dengan fungsi tujuan waktu berhingga, Wakhid Musthofa (2011)

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

menggunakan metode *sweep* untuk menghasilkan persamaan diferensial Riccati. Persamaan diferensial Riccati yang diperoleh berguna untuk mencari solusi ekuilibrium titik pelana pada permainan linier kuadratik untuk sistem *descriptor*. A. Bensoussan (2006) juga meneliti tentang solusi dari persamaan diferensial linier quadratik. Pada penelitian A. Bensoussan (2006) menjabarkan dari persamaan dinamik dua kendali dengan fungsi tujuan untuk waktu berhingga. A. Bensoussan membentuk persamaan Hamiltonian yang menghasilkan persmaan diferensial Riccati, solusi dari persamaan diferensial Riccati digunakan untuk menghasilkan vektor kendali untuk sistem dinamiknya. Namun fungsi tujuan yang dipakai merupakan fungsi tujuan yang biasanya digunakan untuk waktu tak berhingga. Sehingga pada penelitian ini fungsi tujuan yang dipakai oleh A. Bensoussan (2006) dirubah dengan menambahkan bentuk integral yang telah ada dengan bentuk kuadratik. Berdasarkan uraian diatas maka peneliti akan mengkaji tentang aplikasi persamaan Diferensial Riccati pada Sistem Dinamik Dua Kendali Waktu Berhingga.

Bahan dan Metode Penelitian

Adapun metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dibentuk persamaan diferensial dinamik linier dua kendali.
2. Dibentuk fungsi tujuan untuk dua kendali
3. Berdasarkan langkah 1 dan 2 dibentuk :
   - Persamaan Hamilton : $H = \boldsymbol{f}(x,u,t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{J}_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$,
   - Persamaan *state* : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$
   - Persamaan *costate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$
   - Persamaam *stasioner* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$
4. Dibentuk matriks Hamilton dan persamaan diferensial Riccati untuk masing-masing kendali.
5. Dicari solusi dari persamaan diferensial Riccati yang terbentuk, kemudian dibentuk vektor kendali barunya.

Bahan-bahan penunjang untuk pembahasan, diberikan sebagai berikut :

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan fungsi dan turunan-turunannya. Persamaan diferensial Riccati memiliki bentuk :

$$\dot{K}(t) = -DK(t) - K(t)A + K(t)SK(t) - Q, \tag{1}$$

dengan $K, Q \in R^{mxn}, D \in R^{mxm}$ dan $S \in R^{nxn}$ untuk mencari solusi dari persamaan diferensial Riccati (1) dibentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

Selanjutnya hubungan solusi persamaan (1) dan (2) diberikan pada teorema sebagai berikut :

Teorema 1 (Engwerda, 2005) diberikan dua persamaan yaitu :

$$\dot{K}(t) = -DK(t) - K(t)A + K(t)SK(t) - Q,$$

(3)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

jika $U(.), V(.)$ adalah sepasang solusi dari Persamaan (4) dengan U nonsingular pada interval $[0, T]$, kemudian $K(t) = V(t)U^{-1}(t)$ adalah solusi dari persamaan diferensial Riccati (3) pada interval $[0, T]$. Sebaliknya, jika $K(t)$ adalah solusi dari Persamaan (3) pada interval $[0, T]$ dan $U(.)$ adalah solusi dasar dari persamaan berikut :

$$\dot{U}(t) = \big(A - SP(t)\big)U(t),$$

maka pasangan $U(t), V(t) = P(t)U(t)$ adalah solusi dari persamaan diferensial Riccati diatas pada interval $[0, T]$.

Teorema 2 (Engwerda, 2005) Diberikan persamaan diferensial Riccati sebagai berikut :

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t)A + K(t)SK(t) - Q, \quad (5)$$
$$K(T) = Q_T,$$

memiliki solusi pada $[0, T]$ jika dan hanya jika persamaan diferensial linier sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix} \quad (6)$$

memiliki solusi pada $[0, T]$, dengan $U(.)$ *nonsingular*.

Jika Persamaan (6) juga memiliki solusi $(U(.), V(.))$, maka solusi dari Persamaan (5) yaitu :

$$K(t) = V(t)U^{-1}(t).$$

Dengan $H = \begin{bmatrix} -A & -S \\ -Q & -D \end{bmatrix}$, solusi dari persamaan diferensial (5) yaitu :

$$\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = e^{H(T-t)} \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Hasil dan Pembahasan

Didefinisikan persamaan diferensial dinamik linier dua kendali untuk waktu t yaitu:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{8}$$

diberikan fungsi tujuan untuk dua kendali sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{x}^T(T_f)P_i(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \int_0^T [\boldsymbol{x}^T Q_i\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i \boldsymbol{u}_i]dt, \quad i = 1,2. \tag{9}$$

Selanjutnya akan dibentuk terlebih dahulu kendali pertama, dengan diketahui kendali kedua yaitu,

$$\boldsymbol{u}_2(t) = -R_2^{-1}B_2^T P_2\boldsymbol{x}(t), \tag{10}$$

Kemudian Persamaan (10) disubtitusikan ke Persamaan (8) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_2R_2^{-1}B_2^T P_2)\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t), \tag{11}$$

Dengan $A \in R^{nxn}, B_i \in R^{nxm}, \boldsymbol{x}(t) \in R^n$ dan kendali input $\boldsymbol{u}(t) \in R^m$.

Dari Persamaan (9) dan (11) akan diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

Persamaan Hamilton : $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = (\boldsymbol{x}^T Q_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i^T R_i\boldsymbol{u}_i) + \boldsymbol{\lambda}^T(A - B_2R_2^{-1}B_2^T P_2)\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) + B_1\boldsymbol{u}_1(\mathrm{t})$ (12)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = (A - B_2R_2^{-1}B_2^T P_2)\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t)$ (13)

Persamaan *costate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = 2Q_1\boldsymbol{x}(t) + A^T\boldsymbol{\lambda}(t) - (B_2R_2^{-1}B_2^T P_2)^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (14)

persamaan *stasioner* : $0 = \frac{\partial H}{\partial x} = 2R_1\boldsymbol{u}_1(t) + B_1^T\boldsymbol{\lambda}(t)$ (15)

Selanjutnya untuk memperoleh vektor kendali pertama diambil Persamaan (15) hingga diperoleh persamaan yaitu:

$$\boldsymbol{u}_1(t) = -\frac{1}{2}R_1^{-1}B_1^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{16}$$

Selanjutnya vektor kendali dari Persamaan (16) disubtitusikan ke Persamaan (11) maka diperoleh:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)\boldsymbol{x}(t) - \frac{1}{2}B_1R_1^{-1}B_1^T\boldsymbol{\lambda}(t), \qquad (17)$$

dengan mengambil Persamaan (14) dan Persamaan (17) maka dapat dibuat sistem homogen Hamilton yaitu :

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - B_2R_2^{-1}B_2^TP_2 & -\frac{1}{2}B_1R_1^{-1}B_1^T\\ -2Q_1 & A^T - (B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Dengan matriks koefisien yang disebut matriks Hamilton, diketahui t_0 dan $\mathbf{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, *state* akhir $\boldsymbol{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\boldsymbol{x}(T_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{T_f} = \boldsymbol{x}^T(T_f)P_1(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) \qquad (19)$$

maka diperoleh :

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{T_f} = \boldsymbol{x}^TP_1\boldsymbol{x} = 2P_1\boldsymbol{x} \qquad (20)$$

dengan $P_1(T_f)$ adalah matriks $n \times n$, selanjutnya didiferensialkan Persamaan (20) terhadap *t* di dapat :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 2(\dot{P}_1\boldsymbol{x} + P_1\dot{\boldsymbol{x}}), \qquad (21)$$

kemudian subtitusikan Persamaan (17) ke Persamaan (21) diperoleh :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 2\left(\dot{P}_1\boldsymbol{x} + P_1((A - B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}B_1R_1^{-1}B_1^T\boldsymbol{\lambda})\right), \qquad (22)$$

karena $\boldsymbol{\lambda} = 2P_1\boldsymbol{x}$ maka Persamaan (22) menjadi :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 2\dot{P}_1\boldsymbol{x} + 2P_1\left((A - B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)\boldsymbol{x} - B_1R_1^{-1}B_1^TP_1\boldsymbol{x}\right) \qquad (23)$$

selanjutnya, subtitusikan Persamaan (14) ke Persamaan (23) diperoleh :

$$-2\dot{P}_1\boldsymbol{x} = 2Q_1\boldsymbol{x} + (A^T - (B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)^T)2P_1\boldsymbol{x} + 2P_1(A - B_2R_2^{-1}B_2^TP_2)\boldsymbol{x} - 2P_1B_1\beta_1^{-1}B_1^TP_1\boldsymbol{x}, \qquad (24)$$

dimisalkan$S_i = B_iR_i^{-1}B_i^T$, $i = 1,2$. maka :

$$\dot{P}_1 = -(A^T - (S_2P_2)^T)P_1 - P_1(A - S_2P_2) + P_1S_1P_1 - Q_1, t \le T_f. \qquad (25)$$

Berdasarkan teorema 2, persamaan diferensial Riccati (25) dapat membentuk persamaan diferensial linier pada persamaan (18). Sehingga persamaan (25) akan memiliki solusi jika persamaan (18) memiliki solusi. Solusi persamaan (18) berkaitan dengan eksistensi solusi persamaan karakteristik dari matriks Hamilton (18), sebagai berikut,

$$0 = \lambda^2 + \left((A^T - (S_2P_2)^T) - (A - S_2P_2)\right)\lambda - \left(\left((A - S_2P_2)(A^T - (S_2P_2)^T)\right) + 2Q_1S_1\right), \tag{26}$$

Maka persamaan (26) akan memiliki solusi jika dipenuhi

$$\begin{aligned} D = &\left((A - S_2P_2)^T - (A - S_2P_2)\right)^2 \\ &+ 4(AA^T - A(S_2P_2)^T - S_2P_2A^T + S_2P_2(S_2P_2)^T + Q_1S_1) > 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Dari persamaan diatas diperoleh bahwa jika nilai $D > 0$, maka matriks Hamilton pada Persamaan (18) memiliki nilai eigen, sehingga dapat juga diperoleh bahwa persamaan (25) memiliki solusi. maka vektor kendali pertama yaitu :

$$\boldsymbol{u}_1^* = -R_1^{-1}B_1^TP_1(\mathrm{t})\boldsymbol{x}(t) \tag{28}$$

Berikutnya, untuk mendapatkan kendali kedua digunakan nilai $\boldsymbol{u}_1^*$ yang disubtitusikan ke Persamaan (8) didapat :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_1R_1^{-1}B_1^TP_1)\boldsymbol{x}(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t), \tag{29}$$

Kemudian dari Persamaan (29) dan (9) untuk *i*=1,2 diperoleh persamaan Hamilton, persamaan *state*, *costate* dan persamaan stasioner. Berdasarkan persamaan stasioner diperoleh kendali kedua yaitu

$$\boldsymbol{u}_2(t) = -\frac{1}{2}R_2^{-1}B_2^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{30}$$

Selanjutnya vektor kendali pada Persamaan (30) disubstitusikan ke persamaan diferensial dinamik (29), sehingga menghasilkan,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - B_1R_1^{-1}B_1^TP_1)\boldsymbol{x}(t) - \frac{1}{2}B_2R_2^{-1}B_2^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{31}$$

berdasarkan Persamaan (31) dan persamaan *costate* dapat diperoleh sistem homogen Hamilton yaitu :

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_1R_1^{-1}B_1^TP_1 & -\frac{1}{2}B_2R_2^{-1}B_2^T \\ -2Q_2 & A^T - (B_1R_1^{-1}B_1^TP_1)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix}, \tag{32}$$

Kemudian dibentuk persamaan differential

$$\dot{P}_2 = -(A^T - (S_2P_2)^T)P_2 - P_2(A - S_1P_1) + P_2S_2P_2 - Q_2, \quad t \le T_f. \tag{33}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Berdasarkan kasus kendali pertama, jika matriks Hamilton pada persamaan (32) dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan nilai diskriminannya nonnegative maka terdapat solusi untuk persamaan differential Riccati (33) yaitu P_2. Sehingga jika terdapat solusi P_2maka vektor kendali yang kedua yaitu

$$\boldsymbol{u}_2^* = -R_2^{-1} B_2^T P_2(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{34}$$

Contoh :

Diberikan fungsi tujuan sebagai berikut :

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2 + \int_0^2 2\,\boldsymbol{x}^2(t) + \boldsymbol{u}_i^2(t)dt, i = 1,2.$$
(35)

Dengan persamaan diferensial dinamik untuk dua kendali sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2(t)$$
(36)

dengan $R_1 = R_2 = 1,\ P_2 = 2$ dan $P(2) = 1.$

Penyelesaian :

Diketahui vektor kendali kedua yaitu $\boldsymbol{u}_2 = -2\boldsymbol{x}(t)$, maka persamaan diferensial dinamik menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{u}_1(t)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan Hamilton, s*tate*, *costate*, dan persamaan stasioner yaitu :

Persamaan Hamilton : $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = 2\boldsymbol{x}^2(t) + \boldsymbol{u}_1^2(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(-\boldsymbol{x}(t) +$ $2\boldsymbol{u}1(t)$

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{u}_1(t)$

Persamaan *costate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = 4\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)$

Persamaan stasioner : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 2\boldsymbol{u}_1(t) + 2\boldsymbol{\lambda}(t)$

dari persamaan *stasioner* didapatkan kendali pertama yaitu $\boldsymbol{u}_1(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)$.

Berdasarkan persamaan kendali pertama, persamaan *state*, persamaan *costate* dan dengan mendefinisikan $\boldsymbol{\lambda} = 2P_1\boldsymbol{x}$, maka diperoleh persamaan diferensial Riccati sebagai berikut,

$$\dot{P}_1 = -2 + 2P_1 + 4P_1^2 \quad (37)$$

Selanjutnya solusi persamaan diferensail Riccati (37) dapat diperoleh dengan membentuk matriks Hmilton berdasarkan kendali pertama, persamaan *state* dan *costate* yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Kemudian, diperoleh nilai eigen dari matriks Hamilton (38) yaitu 3 dan -3, dan juga vektor eigennya yaitu $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $V_{-3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{3(2-t)} + \frac{1}{2} e^{-3(2-t)} \\ \frac{1}{2} e^{-3(2-t)} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh solusi dari persamaan diferensial Riccati sebagai berikut :

$$P_1(t) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(t)}{\boldsymbol{x}(t)} = \frac{\frac{1}{2} e^{-3(2-t)}}{\frac{1}{2} e^{3(2-t)} + \frac{1}{2} e^{-3(2-t)}}$$

sehingga didapatkan kendali pertama pada saat $t = 2$ yaitu $\boldsymbol{u}_1^*(t) = -\boldsymbol{x}(t)$.

Berikutnya, untuk menentukan kendali kedua digunakan $\boldsymbol{u}_1^*(t) = -\boldsymbol{x}(t)$. Selanjutnya dengan proses yang sama seperti pada kendali pertama diperoleh persamaan diferensial Riccati yaitu,

$$\dot{P}_2 = -2 + 2P_2 + P_2^2.$$

Adapun matriks Hamilton yang diperoleh unutk kasus kendali kedua yaitu,

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix},$$

Maka diperoleh solusi dari persamaan diferensial Riccati sebagai berikut :

$$P_2(t) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(t)}{\boldsymbol{x}(t)} = \frac{-\frac{5}{7} e^{1,7(2-t)} + \frac{6}{7} e^{-1,7(2-t)}}{\frac{1}{7} e^{1,7(2-t)} + \frac{6}{7} e^{-1,7(2-t)}},$$

sehingga didapatkan kendali kedua pada saat $t = 2$ yaitu $\boldsymbol{u}_2^*(t) = -0{,}142\boldsymbol{x}(t)$**.** Selanjutnya dengan mensubstitusikan kendali pertama dan kendali kedua ke persamaan (36), maka solusi dari persamaan (36) yaitu $\boldsymbol{x}(t) = e^{-1{,}142(t)}$. Solusi tersebut menunjukkan bahwa untuk setiap $t > 0$ maka
$\boldsymbol{x}(t) \to 0$. Maka kedua vektor kendali yang diperoleh dapat menstabilkan persamaan (36).

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka diperoleh kesimpulan bahwa untuk mendapatkan masing-masing kendali, yaitu kendali pertama dan kendali kedua maka dilakukan operasi dari fungsi dinamik dan fungsi tujuan yang diberikan yaitu :
Fungsi dinamik :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t),\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

Fungsi tujuan :

$$\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{u}_1,) = \boldsymbol{x}^T(T_f)P_1(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \int_0^T [Q_1\boldsymbol{x}^2 + R_1\boldsymbol{u}_1{}^2]dt,$$

$$\boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{x}^T(T_f)P_2(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \int_0^T [Q_2\boldsymbol{x}^2 + R_2\boldsymbol{u}_2{}^2]dt.$$

Sehingga menghasilkan persamaan diferensial Riccati. Solusi dari persamaan diferensial Riccati tersebut digunakan untuk menghasilkan vektor kendali yaitu :

$$\boldsymbol{u}_1^* = -R_1^{-1}B_1^TP_1(t)\boldsymbol{x}(t)$$
$$\boldsymbol{u}_2^* = -R_2^{-1}B_2^TP_2(t)\boldsymbol{x}(t)$$

Vektor kendali $\boldsymbol{u}_i^* = -R_i^{-1}B_i^T\boldsymbol{\lambda}$**,** untuk i=1,2 yang telah diperoleh, dapat dipandang merupakan vector kendali yang minimal sama dengan vektor kendali terdahulu.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan diferensial Riccati dapat dibentuk matriks Hamilton, persamaan diferensial Riccati memiliki solusi jika dan hanya jika matriks Hamilton memiliki nilai eigen. Jika persamaan aljabar Riccati memiliki solusi P_i untuk $i = 1, 2$. Maka vektor kendali $\boldsymbol{u}_i = -R_{ii}^{-1}B_i^TP_i\boldsymbol{x}$, $i = 1, 2$. Oleh karena itu dapat di tulis bahwa persamaan aljabar Riccati memiliki peranan yang penting dalam membentuk vektor kendali, karena jika tidak terdapat solusi persamaan aljabar Riccati maka vektor kendali masih berbentuk $\boldsymbol{u}_i^* = -R_i^{-1}B_i^T\boldsymbol{\lambda}$**,** untuk i=1,2, yang masih mengandung pengali lagrange.

Daftar Pustaka

[1] A.Bensoussan., 2006. *Explicit Solution of Linear Quadratic Differential Games*. Texas. University of Texas at Dallas.

[2] Arias, Enrique, dkk., 2010. *Adams-Basforth and Adams-moulton Methods for Solving Differential Riccati Equation*, Computers and Mathematics with Aplications. Vol 60, hlm. 3032-3045.

[3] Engwerda, Jacob., 2005, *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, Chichester : John Wiley & Sons, Inc.

[4] Lewis, Frank.L. and Vassilis L. Syrmos, 1995, *Optimal Control*. Toronto : John Wiley & Sons, Inc.

[5] Musthofa, M.W. 2009. *Desain Linear Quadratic Regulator pada Sistem Inverted Pendulum.* Prosiding Seminar Nasional Matematika UNY. Yogyakarta.

[6] Musthofa, M.W. 2011. *Karakteristik Persamaan Aljabar Riccati dan Penerapannya Pada Masalah Kendali.* prosiding Seminar Nasional Penelitian UNY. Yogyakarta.

[7] Ogata, Katsuhiko., 1995, *Discrete-Time Control Sistems*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc.

[8] Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Sistem Theory*. Delft : University of Technology.