Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. I, No. I, Juni 2016, pp.1 - 11
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Modifikasi Metode Rata-Rata Harmonik Newton Tiga Langkah Menggunakan Interpolasi Hermite Orde Tiga

Wartono[1], Dewi Sartika[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: [1] wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Metode rata-rata harmonik Newton merupakan metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan orde konvergensi tiga. Pada makalah ini, penulis memodifikasi metode rata-rata Harmonik Newton tiga langkah menggunakan Interpolasi Hermite orde tiga. Analisa konvergensi menujukkan bahwa orde konvergensi metode iterasi baru adalah delapan memerlukan empat evaluasi fungsi setiap iterasinya dengan indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1{,}6817928$. Simulasi numerik dilakukan menggunakan beberapa fungsi dan dibandingkan dengan metode lainnya untuk menunjukkan performa metode iterasi baru tersebut.

Kata Kunci: interpolasi Hermite, metode rata-rata harmonik Newton, orde konvergensi, persamaan nonlinear.

ABSTRACT

Newton's Harmonic mean method is one of the iteration method with cubically order convergence that can be used to solve a nonlinear equation. In this paper, the authors modified the three step Newton's Harmonic mean method by using third order Hermite Interpolation. The analisys of convergence shows that the new iteration method with eighth-order convergence and requires four evaluation of with efficiency index as $8^{1/4} \approx 1{,}6817928$. Numerical simulation will be presented by using a number of functions and compared other methods to show the performance of the new iterative method.

Keywords: *Hermite interpolation, Newton's harmonic mean method, order of convergence, nonlinear equation.*

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Pendahuluan

Persamaan nonlinear banyak ditemukan dalam berbagai bidang, seperti fisika, ekonomi, teknik yang mana sebagian besar sulit ditemukan solusinya secara analitik. Oleh karena itu, penyelesaian alternatif dilakukan secara numerik, yaitu berupa perhitungan yang dilakukan secara berulang atau lebih dikenal dengan nama metode iterasi.

Banyak metode iterasi yang dapat digunakan, salah satunya yaitu metode Newton, yang dalam perhitungannya menggunakan satu tebakan awal dalam menemukan akar hampiran dari persamaan nonlinear dan bentuk iterasinya dinyatakan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1)$$

Pengembangan metode iterasi Newton menjadi metode iterasi dengan orde konvergensi lebih tinggi banyak dilakukan oleh peneliti dengan cara memodifikasi metode Newton menggunakan berbagai pendekatan: integral Newton [13], titik tengah [7], rataan harmonik [8, 10], kuadratur Newton-Cote [6, 11], selisih terbagi maju [12].

Metode Iterasi yang Dikembangkan

Pertimbangkan kembali varian metode Newton yang dikembangkan oleh Ozban [11] dengan mensubstitusikan bentuk rataan Harmonik yang diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(f'(x_n) + f'(y_n))}{2f'(x_n)f'(y_n)} \qquad (2)$$

dengan y_n didefinisikan pada Persamaan (1).

Persamaan (2) merupakan persamaan iterasi varian metode Newton dengan orde konvergensi kubik dan melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensinya adalah sebesar $3^{1/3} \approx 1{,}4422$.

Oleh karena itu, untuk meningkatkan indeks efisiensi sehingga orde yang dihasilkan optimal, peneliti melakukan reduksi terhadap $f'(y_n)$ pada Persamaan (2), sebagaimana yang dilakukan Chun dan Neta [4] dengan menggunakan pendekatan teorema Newton yang ditulis dalam bentuk

$$f'(y_n) = f'(x_n) + \int_{x_n}^{y_n} f''(t)\,dt \qquad (3)$$

Selanjutnya, untuk meningkatkan orde konvergensi, metode iterasi dibentuk menjadi tiga langkah yang mana pada langkah ketiga merupakan bentuk Newton dalam z_n,

Oleh karena sebagai konsekuensi dari penambahan langkah iterasi mengakibatkan bertambah jumlah evaluasi fungsi, untuk dilakukan reduksi $f'(z_n)$ pada langkah ketifa dengan menggunakan Interpolasi Hermite orde tiga, sebagaimana pernah dilakukan oleh beberapa peneliti seperti Zhao, dkk [14].

Pada bagian terakhir akan dilakukan simulasi numerik untuk menentukan banyaknya iterasi yang dihasilkan beserta COC (*computational order of convergence*), dan selanjutnya akan dibandingkan dengan metode iterasi lainnya untuk melihat kinerja dari metode iterasi tersebut.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Hasil dan Pembahasan

a. Modifikasi Metode Rata-Rata Harmonik Newton

Pertimbangkan kembali modifikasi metode rata-rata harmonik Newton adalah dengan mereduksi fungsi $f'(y_n)$ dalam bentuk

$$f'(y_n) = 2\left(\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right) - f'(x_n) \tag{4}$$

dan dengan mensubstitusikan y_n pada Persamaan (1), maka Persamaan (4) menjadi

$$f'(y_n) = -\frac{2(f(y_n) - f(x_n))f'(x_n)}{f(x_n)} - f'(x_n) \tag{5}$$

Selanjutnya mensubstitusikan $f'(y_n)$ pada Persamaan (2) dengan (5), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))} \tag{6}$$

dan menggantikan x_{n+1} dengan z_n, maka persamaan (6) menjadi

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))} \tag{7}$$

Berikutnya akan ditambahkan langkah ketiga dalam bentuk metode Newton seperti berikut:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{8}$$

dengan z_n sebagaimana telah didefinisikan pada Persamaan (8) dan $f'(z_n)$ diaproksimasi dengan menggunakan interpolasi Hermite orde tiga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_3'(z_n) &= 2\frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} + \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} - 2\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \\ &\quad + \frac{y_n - z_n}{y_n - x_n}\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - \frac{y_n - z_n}{y_n - x_n} f'(x_n) \\ &= 2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n)f[y_n, x_n, x_n] \end{aligned} \tag{9}$$

$$f[x_n, z_n] = \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} \tag{10}$$

$$f[y_n, z_n] = \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} \tag{11}$$

$$f[x_n, y_n] = f[y_n, x_n] = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \tag{12}$$

$$f[y_n, x_n, x_n] = \frac{f[y_n, x_n] - f'(x_n)}{y_n - x_n} \tag{13}$$

Diasumsikan bahwa $H_3'(z_n) \approx f'(z_n)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H_3'(z_n) \approx f'(z_n) &= 2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] \\ &\quad + (y_n - z_n)f[y_n, x_n, x_n] \end{aligned} \tag{14}$$

Berdasarkan uraian di atas, maka persamaan metode iterasi tiga langkah ditulis sebagai berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (15.a)$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))} \quad (15.b)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n)f[y_n, x_n, x_n]} \quad (15.c)$$

Persamaan (15.a)–(15.c) memiliki empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$

b. Analisis Konvergensi

Berdasarkan persamaan iterasi yang telah diperoleh sebagaimana diberikan pada Persamaan (15.a)-(15.c), maka selanjutnya akan ditentukan orde konvergensi persamaan iterasi tersebut dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Berikut ini diberikan teorema orde konvergensi dari Persamaan (15.a)-(15.c) sebagai berikut:

Teorema 1 : Misalkan $\alpha \in D$ akar sederhana dari fungsi $f : D \subset \Re \to \Re$ pada interval buka D. Jika x_0 cukup dekat ke akar α, maka Persamaan (15) memiliki orde kekonvergenan delapan, dengan persamaan galat

$$e_{n+1} = (2c_2^3c_3^2 - c_4c_2^2c_3 - 2c_2^5c_3)e_n^8 + O(e_n^9) \quad (16)$$

Bukti : Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$ maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Asumsikan $e_n = x_n - \alpha,$ kemudian mengekspansikan $f(x_n)$ disekitar α , sehingga diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \frac{f^4(\alpha)}{4!}(x_n - \alpha)^4 + \cdots + O(e_n^9) \quad (17)$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $e_n = x_n - \alpha,$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + \frac{f^4(\alpha)}{4!}e_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \\ &= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{f^4(\alpha)}{4!f'(\alpha)}e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)\right] \quad (18) \end{aligned}$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \quad (19)$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_2e_n^3 + \cdots + O(e_n^9)) \quad (20)$$

dengan $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)k!},\ k = 2,3\ldots.$

Pembagian Persamaan (20) terhadap Persamaan (19) dengan menggunakan deret geometri, maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \quad (21)$$

dan selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (21) ke Persamaan (15), maka diperoleh

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No.1, Januari 2016
ISSN 2460-4542

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (22)$$

atau

$$y_n = \alpha + b_n \qquad (23)$$

dengan

$$b_n = c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (24)$$

Untuk memperoleh fungsi $f(y_n)$, maka digunakan ekspansi deret Taylor disekitar α, sehingga diperoleh

$$f(y_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(y_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(y_n - \alpha)^2 + \ldots + O(e_n^9)$$

dan oleh karena $y_n = \alpha + b_n$ maka

$$f(y_n) = f'(\alpha)(b_n + c_2 b_n^2 + c_3 b_n^3 + c_4 b_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (25)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (24) ke Persamaan (25) sehingga diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (26)$$

Berdasarkan Persamaan (19) dan Persamaan (26) diperoleh

$$f(x_n) - f(y_n) = e_n + (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (-2c_4 - 5c_2^3 + 7c_2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (27)$$

dan dengan menggunakan Persamaan (19), maka diperoleh

$$f(x_n)(f(x_n) - f(y_n)) = f'(\alpha)(e_n + (-2c_2^3 + 2c_2c_3 - c_2(c_3 - 2c_2^2))e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (28)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (20) diperoleh

$$f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n)) = -f'(\alpha)^2(1 + c_2e_n + 2c_2^2e_n^2 + (-c_4 - 2c_2^3 + 5c_2c_3)e_n^3 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (29)$$

maka

$$\frac{f(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n) - 2f(y_n))} = e_n + (-2c_2^3 + 2c_2c_3 - c_2(c_3 - 2c_2^2))e_n^4 + \cdots + O(e_n^9))$$

(30)

dan dengan mensubstitusikan Persamaan (30) ke Persamaan (15.b) diperoleh

$$z_n = \alpha - c_2c_3e_n^4 + (-22c_2^4 - 8c_3^2 + 32c_2^2c_3 - 12c_4c_2)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (31)$$

atau

$$z_n = \alpha + h_n \qquad (32)$$

dengan

$$h_n = -c_2c_3e_n^4 + (-22c_2^4 - 8c_3^2 + 32c_2^2c_3 - 12c_4c_2)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (33)$$

Selanjutnya, ekspansi deret Taylor terhadap $f(z_n)$ disekitar α ditulis dalam bentuk

$$f(z_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z_n - \alpha)^2 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (34)$$

dan dengan menggunakan Persamaan (32) dan (33), maka Persamaan (34) menjadi

$$f(z_n) = f'(\alpha)(-c_2c_3e_n^4 + (-22c_2^4 - 8c_3^2 + 32c_2^2c_3 - 12c_4c_2)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9)) \qquad (35)$$

Selanjutnya akan dibentuk $f[x_n, z_n]$, $f[y_n, z_n]$, $f[x_n, y_n]$ dan $f[y_n, x_n, x_n]$ dengan mensubstitusikan Persamaan (19), (20), (22), (26), (32) dan (36) ke Persamaan (10), (11), (12) dan (13), diperoleh masing-masing sebagai berikut:

$$f[x_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + c_4e_n^3 - c_2^2c_3e_n^4 + (32c_3c_2^3 - 22c_2^5 - 12c_4c_2^2 - 9c_2c_3^2)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9) \qquad (36)$$

$$f[y_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2^2 e_n^2 + (-2c_2^3 + 2c_2c_3)e_n^3 + (4c_2^4 + 3c_4c_2 - 8c_2^2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \quad (37)$$

$$f[x_n, y_n] = f'(\alpha)(1 + c_2e_n + (c_3 + c_2^2)e_n^2 + (3c_2c_3 - 2c_2^3 + c_4)e_n^3 + (2c_3^2 + 4c_4c_2 + 3c_2^4 - 8c_2^2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \quad (38)$$

$$f[y_n, x_n, x_n] = f'(\alpha)(c_2^2e_n^2 + (4c_2c_3 - 2c_2^3)e_n^3 - (4c_2^4 + 4c_3^2 - 9c_2^2c_3 + 6c_4c_2)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9) \quad (39)$$

Dengan menggunakan Persamaan (36), (37), (38) dan (39), dan disubstitusikan ke Persamaan (14), maka diperoleh

$$2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n)f[y_n, x_n, x_n]$$
$$= 1 + (c_4c_2 + 2c_2^4 - 3c_2^2c_3)e_n^4 + (-28c_4c_2^2 - 43c_2^5 - 26c_2c_3^2 + 12c_3c_4 + 68c_3c_2^3)e_n^5 + (-24c_2c_3c_4 + 43c_3^2c_2^2 - 70c_3c_2^4 + 29c_2^3c_4 + 8c_2^6)e_n^6 + \cdots + O(e_n^9) \quad (40)$$

Pembagian Persamaan (35) terhadap Persamaan (40) dan dengan menggunakan deret geometri, maka diperoleh

$$\frac{f(z_n)}{2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n)f[y_n, x_n, x_n]}$$
$$= -c_2c_3e_n^4 + (-22c_2^4 - 8c_3^2 + 32c_2^2c_3 - 12c_4c_2)e_n^5 + (29c_4c_2^2 + 8c_2^5 - 24c_3c_4 + 43c_2c_3^2 - 70c_3c_2^3)e_n^6 + \cdots + O(e_n^9) \quad (41)$$

dan selanjutnya, substitusikan Persamaan (31) dan (41) ke Persamaan (8), maka diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (2c_2^3c_3^2 - c_4c_2^2c_3 - 2c_2^5c_3)e_n^8 + O(e_n^9) \quad (42)$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka Persamaan (42) menjadi

$$e_{n+1} = (2c_2^3c_3^2 - c_4c_2^2c_3 - 2c_2^5c_3)e_n^8 + O(e_n^9) \quad (43)$$

Persamaan (43) merupakan orde konvergensi dari persamaan metode iterasi baru yang melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$, maka sehingga indeks efisiennya adalah sebesar $8^{1/4} \approx 1{,}68179283$.

Indeks efisiensi dari modifikasi rata-rata Harmonik Newton tiga langkah menggunakan Interpolasi Hermite orde tiga dapat dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya, seperti metode Newton (NM), metode Potra Ptak (MPP), metode komposit Potra Ptak dan Newton Steffensen (MKPNS) [12], metode modifikasi Ostrowski (MMO) [13] dan modifikasi metode rata-rata harmonik Newton dengan pendekatan interpolasi Hermite orde tiga (MRHNIH) [15]. Berikut ini merupakan tabel untuk membandingkan beberapa metode iterasi berdasarkan nilai indeks effisiensinya.

Tabel 1. Perbandingan Indeks Effisiensi

No	Metode Iterasi	Orde (P)	Evaluasi Fungsi	Indeks Effisiensi
1	Newton	2	2	$2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}414213$
2	Potra Ptak	3	3	$3^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}442250$
3	Rata-rata Harmonik Newton	3	3	$3^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}442250$
4	MKPNS	4	3	$4^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}587401$

5	MMO	6	4	$6^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}565084$
6	MRHNIH	8	4	$8^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}681793$

Berdasarkan Tabel 1, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan nilai indeks effisiensi, Persamaan (15) lebih baik dari beberapa metode lainnya.

c. Simulasi Numerik

Pada simulasi numerik ini, metode baru akan dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya, seperti metode Newton (NM), metode Potra Ptak (MPP), metode komposit Potra Ptak dan Newton Steffensen (MKPNS), metode modifikasi Ostrowski (MMO) dan modifikasi metode rata-rata harmonik Newton dengan pendekatan interpolasi Hermite orde tiga (MRHNIH) dengan menggunakan fungsi-fungsi berikut.

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\qquad \alpha = 1{,}36523001341409684$

$f_2(x) = \cos(x) - x$ $\qquad \alpha = 0{,}7390851332151606$

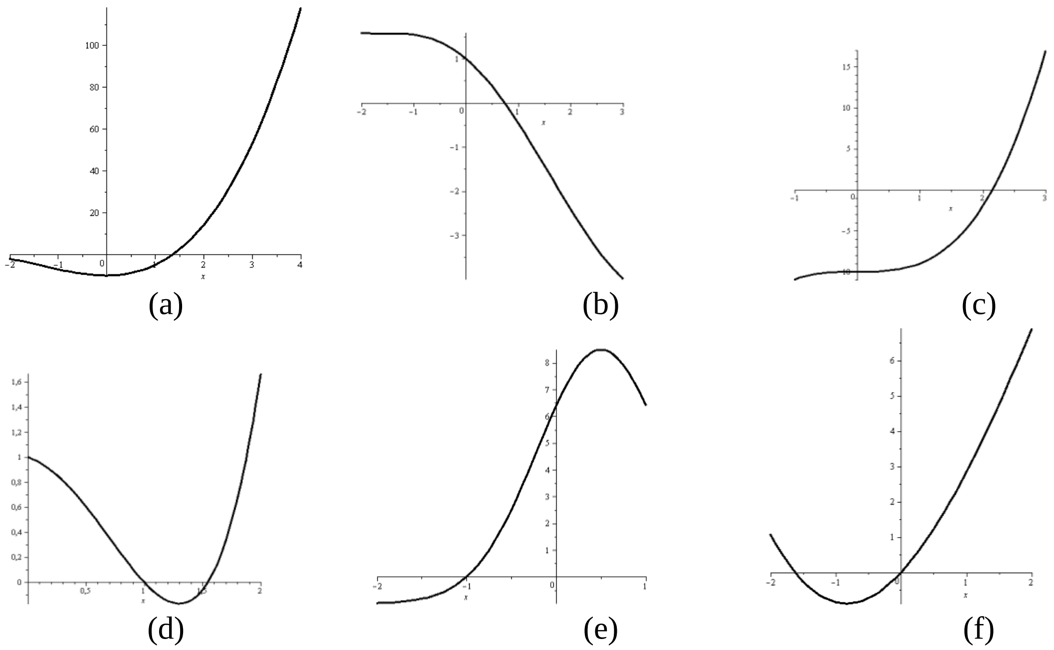
$f_3(x) = x^3 - 10$ $\qquad \alpha = 2{,}15443469003188$

$f_4(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ $\qquad \alpha = 1$

$f_5(x) = e^{-x^2+x+2} - 1$ $\qquad \alpha = -1$

$f_6(x) = x^2 + \sin(x) + x$ $\qquad \alpha = 0$

Grafik dari fungsi-fungsi tersebut ditunjukkan dalam gambar berikut ini:



Gambar 1. Grafik fungsi a) $f_1(x)$ **b)** $f_2(x)$ **c)** $f_3(x)$ **d)** $f_4(x)$ **e)** $f_5(x)$ dan **f)** $f_6(x)$

Selanjutnya, perhitungan komputasi dilakukan dengan menggunakan *software* Maple 13 dan ketelitian 800 digit terhadap beberapa fungsi yang diberikan untuk menentukan banyakknya iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi, galat mutlak dan nilai fungsi pada iterasi ke-n+1 yang diberikan pada Tabel 2.

Untuk menghitung COC dilakukangan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$\rho = \frac{\ln\left|x_{n+2}-\alpha / x_{n+1}-\alpha\right|}{\ln\left|x_{n+1}-\alpha / x_{n}-\alpha\right|} \tag{44}$$

Tabel 2 Jumlah Iterasi Modifikasi Metode Rata-rata Harmonik Newton Tiga Langkah Menggunakan Interpolasi Hermite Orde Tiga

Fungsi	x_n	n	x_n	$\lvert x_n-\alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	COC
$f_1(x)$	1,5	3	1,3652300134	3,7422987.E-632	6,1798072.E-623	7,99999999
$f_2(x)$	1,2	3	0,7390851332	4,5596868.E-528	7,6311467.E-528	7,99999999
$f_3(x)$	2,4	3	2,1544346900	1,3961288.E-523	1,9440768.E-522	7,99999999
$f_4(x)$	0,5	3	0,9999999999	3,4180509.E-297	3,4180509.E-297	7,99999619
$f_5(x)$	–0,5	3	0,9999999999	2,7505182.E-244	8,2515546.E-244	7,99998741
$f_6(x)$	0,3	3	3,6659259920	3,6659259.E-443	7,3318518.E-443	7,99999998

Banyaknya iterasi yang dibutuhkan pada setiap metode iterasi yang dibandingkan diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3 Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		NM	MPP	MKPNS	MMO	MVRHNIH
$f_1(x)$	1,5	9	6	4	3	3
$f_2(x)$	1,2	9	6	4	3	3
$f_3(x)$	2,4	9	6	4	3	3
$f_4(x)$	0,5	9	6	5	3	3
$f_5(x)$	-0,5	10	7	5	4	3
$f_6(x)$	0,3	9	6	5	3	3

Berdasarkan Tabel 3 dapat ditunjukkan bahwa secara umum metode iterasi dengan orde lebih tinggi membutuhkan lebih sedikit jumlah iterasi dibandingkan metode iterasi dengan orde yang lebih rendah.

Selanjutnya, akan dibandingkan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC) dengan menggunakan Persamaan (44) yang diberikan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4 Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC				
		NM	MPP	MMO	MKPNS	MVRHNIH
$f_1(x)$	1,5	1,9999999	3,0000000	3,9999999	5,9999999	7,99999999
$f_2(x)$	1,2	1,9999999	2,9999999	3,9999999	5,9999998	7,99999999
$f_3(x)$	2,4	1,9999999	2,9999999	3,9999999	5,9999999	7,99999999
$f_4(x)$	0,5	1,9999999	3,0000000	3,9999999	5,9999813	7,99999619
$f_5(x)$	-0,5	1,9999999	2,9999999	3,9999999	5,9999999	7,99998741
$f_6(x)$	0,3	1,9999999	2,9999999	3,9999999	5,9999999	7,99999998

Tabel 4 menunjukkan perbandingan orde konvergensi secara komputasi dari masing-masing metode.

Kesimpulan

Modifikasi rata-rata harmonik Newton tiga langkah menghasilkan metode iterasi baru dengan orde konvergensi delapan yang mana setiap iterasinya membutuhkan empat evaluasi fungsi f yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$ sehingga indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1,681792831$. Simulasi numerik juga memberikan inrformasi bahwa metode baru memiliki perporma yang lebih baik dibandingkan dengan metode-metode lainnya.

DaftarPustaka

[1] Ababneh, O. Y., New Newton's method with third-order convergence for solving nonlinear equations, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 61, 2012, 1071–1073.

[2] Chun, C., dan Ham, Y., Some fourth-order modifications of Newton's method, *Applied Mathematics and Computation*, 197, 2008, 654–658.

[3] Chun, C., A simply constructed third-order modifications of Newtons's method, *Journal of Computational Applied Mathematics,* 219, 2008, 81–89.

[4] Chun, C., dan Neta, B., Certain improvement of Newton's method with fourth-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 2009, 821 - 828.

[5] Frontini, M. dan Sormani, E., Some variant of Newton's method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 140, 2003, 419 – 426.

[6] Hasanov, V. I., Ivanov, I. G., dan Nedjibov, G., A new modification of Newton's method, *Applied Mathematics and Engineering*, 27, 2002, 278 –286 .

[7] Jisheng, K., Yitian, L., dan Xiuhua, W., Third-order modification of Newton's method, *Journla of Computation and Applied Mathematics*, 205, 2007, 1 – 5.

[8] Kalyanasundaram, J. J., Modified Newton's method using harmonic mean for solving nonlinear equations, *IOSR Journal of Mathematics*, 7(4), 2013, 93– 97

[9] Lukic, T., Ralevic, N. M., Geometric mean Newton's method for simple and multiple roots, *Applied Mathematics Letters*, 21, 2008, 30 – 36.

[10]Nedzhibov, G., On a few iterative methods for solving nonlinear equations. *Application of Mathematics in Engineering and Economics XXVIII*, in: Proceeding of the XXVIII Summer school Sozopol' 02, pp.1-8, Heron press, Sofia, 2002.

[11] Ozban, A.Y., Some new variants of Newton's method, *Applied Mathematics Letter*, 17, 2004, 677 – 682.

[12] Sharma, J. R., A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 2005, 242 – 246.

[13] Singh, M. K., A six-order variant of Newton's method for solving nonlinear equation, *Computational Methods in Science and Technology*, 15(2), 2009, 185 – 193.

[14] Weerakoon, S. dan Fernando, T. G. I., A Variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Applied Mathematics Letters*, 13, 2000, 87– 93.

[15] Zhao, L., dkk., New families of eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 11, 2012, 283 – 293.