Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2, No. I, Januari 2016
ISSN 2460-4542

Aplikasi Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah Dan Laju Pertumbuhan Perempuan Di Provinsi Riau Pada Tahun 2017

[1]C. M. Corazon, [2]Yuslenita Muda, [3]Nurul Hasanah
[1,2,3]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau
E-mail: corry@uin-suska.ac.id, corrazon_m@yahoo.co.id, uun.nurulhasanah@gmail.com

ABSTRAK

Jumlah penduduk di Indonesia berdasarkan harian Kompas.com edisi 23 September 2014 yaitu penduduk perempuan berjumlah 50.88 persen dan penduduk laki-laki yaitu 49.12 persen. Berdasarkan sumber tersebut pertumbuhan populasi perempuan di Indonesia sudah baik, namun jika mengacu pada data yang peneliti dapat dari Badan Pusat Statistik Provinsi Riau pada Tahun 2007 hingga 2012 pertumbuhan populasi perempuan di Provinsi Riau lebih rendah dari pada laki laki. Pertumbuhan populasi perempuan merupakan hal penting yang harus diamati, mengingat peran perempuan yang salah satunya adalah menentukan perkembangan populasi manusia di masa depan, karena tanpa peranan perempuan populasi tersebut tidak akan dapat berkembang. Hal ini mendorong peneliti untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi perempuan di Provinsi Riau pada Tahun 2017. Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk meramalkan jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Dengan mengaplikasikan matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan perempuan di Provinsi Riau pada Tahun 2017 dapat disimpulkan bahwa jumlah populasi perempuan di Provinsi Riau pada Tahun 2017 cenderung mengalami peningkatan.
.

***Kata kunci**: matriks Leslie, nilai eigen, populasi, vektor eigen.*

ABSTRACT

Based on Kompas.com at 23 September 2014, the population of Indonesian consist of 50.88 percent of females and 49.12 percent males. The resources say that population growing of women in Indonesia is good. The same thing is found from data in Badan Pusat Statistik Provinsi Riau from 2007 until 2012, that is the women population growth in Riau Province is lower than the men population growth. The women population growth is an important thing to be observed, because the women determine the development of the human population in the future, because without it the role of women population will not be able to develop. This prompted the researchers to predict the amount and rate of growth of the population of women in Riau Province in the Year 2017. Leslie matrix is a matrix that is used to predict the amount and rate of growth of a population. By applying Leslie matrix to predict the amount and rate of growth of women in Riau Province in the year 2017 we can conclude that the population of women in Riau Province in the year 2017 are likely to increase.

***Key Words**: Leslie matrix, eigen value, population, eigen vector.*

Pendahuluan

Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Dalam pertumbuhan populasi terdapat beberapa faktor yang sangat berpengaruh, yaitu tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup dan rentang umur dari populasi. Yang disebut pertumbuhan populasi adalah adanya perubahan jumlah dari suatu populasi. Pertumbuhan populasi tersebut dapat memberikan informasi seberapa besar perubahan jumlah populasi untuk tahun berikutnya. Salah satu manfaat dari pemodelan dengan matriks Leslie adalah bagi peternak hewan, yaitu untuk mengetahui pertumbuhan populasi dari hewan ternaknya.

Harian Kompas edisi 23 September 2014 menuliskan bahwa jumlah penduduk perempuan di Indonesia lebih banyak yaitu sekitar 50.88 persen jika dibandingkan dengan jumlah populasi laki-laki yaitu sebesar 49.12 persen. Pertumbuhan populasi perempuan merupakan hal penting yang harus diamati, mengingat peran perempuan yang salah satunya adalah menentukan perkembangan populasi manusia di masa depan, karena tanpa peranan perempuan populasi tersebut tidak akan dapat berkembang.

Menurut data yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Riau, jumlah penduduk perempuan di Provinsi Riau lebih kecil dibandingkan jumlah penduduk laki-laki. Hal ini berbanding terbalik dengan jumlah penduduk Indonesia yang memiliki jumlah penduduk perempuan lebih tinggi dibanding jumlah penduduk laki-laki. Seharusnya hal tersebut menjadi fokus pemerintah untuk menyeimbangkan pertumbuhan populasi perempuan dan laki-laki di Provinsi Riau, mengingat peran perempuan menjadi sentral dalam pertumbuhan populasi masyarakat Riau.

Model Pertumbuhan Populasi Menggunakan Matriks Leslie

Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Beberapa faktor yang berpengaruh dalam pertumbuhan populasi adalah tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup dan rentang umur dari populasi. Didefinisikan a_i sebagai tingkat kesuburan betina pada kelas umur ke-i yaitu rata-rata jumlah anak betina yang lahir dari kelompok umur i saat waktu ke t per jumlah betina pada kelas umur ke-i. Didefenisikan b_i sebagai tingkat ketahanan hidup betina pada kelas umur ke-i yaitu peluang betina yang dapat bertahan hidup dari kelas umur ke i sampai $i+1$ saat waktu ke t. Berikut adalah bentuk umum dari matriks Leslie yang dinyatakan pada [3] :

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n$$

$$0 < b_i \leq 1 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n-1$$

Berdasarkan batasan masalah diketahui bahwa paling sedikit satu kelas umur dari $a_i > 0$, karena jika $a_i = 0, \forall i$, maka pada kelas tersebut tidak ada kelahiran yang terjadi. Kelas umur yang memiliki nilai $a_i > 0$, disebut kelas umur kesuburan. Diketahui $b_i \neq 0$, karena jika $b_i = 0$ maka tidak ada betina yang dapat bertahan hidup kekelas berikutnya.

Jika terdapat batas umur hidup dari betina pada suatu populasi adalah A tahun, dan populasi dibagi menjadi i kelas umur, maka masing-masing kelas umur memiliki rentang umur A/i tahun. Sebagai contoh dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Penentuan Kelas Umur

Kelas Umur	Rentang Umur
1	$\left[0, \frac{A}{i}\right)$
2	$\left[\frac{A}{i}, \frac{2A}{i}\right)$
3	$\left[\frac{2A}{i}, \frac{3A}{i}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	$\left[\frac{(i-2)A}{i}, \frac{(i-1)A}{i}\right)$
i	$\left[\frac{(i-1)A}{i}, A\right]$

Diketahui jumlah populasi betina pada masing-masing kelas umur pada saat $t = 0$, dan dimisalkan $n_1(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t)$ adalah jumlah betina dikelas umur i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + \cdots + n_i(t)$$

Jumlah betina pada masing-masing kelas umur saat t dapat ditulis

$$n(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_i(t) \end{bmatrix}$$

Vektor $n(t)$ dinamakan *vektor distribusi umur awal*.

Untuk waktu $t+1$ dengan $n_1(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur ke i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t+1) = n_1(t+1) + n_2(t+1) + n_3(t+1) + \cdots + n_i(t+1)$$

Vektor distribusi umur n saat waktu $t+1$ dapat ditulis

$$n(t+1) = \begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_i(t+1) \end{bmatrix}$$

Didefinisikan pada waktu $t+1$, populasi pada kelas umur ke 1 adalah

$$n_1(t+1) = a_1 n_1(t) + a_2 n_2(t) + \cdots + a_i n_i(t) \qquad (1)$$

Jika jumlah populasi betina pada saat ke t untuk setiap kelas umurnya mencapai tahun ke $t+1$, maka untuk kelas umur pertama pada populasi saat $t+1$ adalah semua jumlah populasi betina yang dilahirkan dan berada saat ke t.

Didefinisikan jumlah betina pada kelas umur ke $i+t$ dengan $i = 1,2,\ldots,n-1$ saat waktu $t+1$ adalah rata-rata jumlah betina pada kelas umur ke i pada waktu ke t yang bertahan hidup saat waktu $t+1$. Sehingga dapat ditulis:

$$n_{i+1}(t+1) = b_i n_i(t) \qquad (2)$$

dimana $i = 1,2,\ldots,i-1$

Atau dapat dibentuk model pertumbuhan populasi sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_i(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_i(t) \end{bmatrix}$$

Atau model pertumbuhan populasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$n(t+1) = Ln(t) \qquad (3)$$

dengan $n(t+1)$ merupakan vektor populasi betina yang berisi prediksi jumlah populasi betina pada kelas umur saat $t+1$. L merupakan sebuah matriks Leslie berukuran $n \times n$, dan $n(t)$ merupakan vektor populasi yang berisi jumlah populasi betina pada kelas umur saat t.

Model pertumbuhan populasi pada Persamaan (3) digunakan untuk memprediksi jumlah populasi 1 periode berikutnya. Untuk mengetahui prediksi jumlah pertumbuhan populasi hingga p periode berikutnya dilakukan beberapa pengembangan. Dari Persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} n(t+1) &= Ln(t) \\ n(t+2) &= Ln(t+1) \\ &= LLn(t) \\ &= L^2 n(t) \\ n(t+3) &= Ln(t+2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= LL^2 n(t) \\
&= L^3 n(t) \\
&\vdots \\
n(t+p) &= Ln\big(t+(p-1)\big) \\
&= LL^{p-1} n(t) \\
&= L^p n(t)
\end{aligned}
$$

Sehingga untuk p tahun berikutnya, model pertumbuhan populasi menjadi

$$n(t+p) = L^p n(t) \tag{4}$$

Nilai Eigen Dari Matriks Leslie

Walaupun pada Persamaan (4) sebelumnya memberikan distribusi umur pada sebarang waktu, namun persamaan itu tidak segera memberikan suatu gambaran umum mengenai dinamika proses pertumbuhan tersebut. Untuk itu kita perlu menyelidiki nila-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari matriks Leslie tersebut. Nilai-nilai eigen dari A adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Persamaan polinomial karakteristik dari matriks Leslie dapat ditulis sebagai berikut:

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \tag{5}$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{i-1} & -a_i \\ -b_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{i-1} & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \cdots - a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} = 0 \tag{6}$$

Untuk menganalisis akar-akar dari polinomial di atas, akan memudahkan jika Persamaan (6) dibagi dengan λ^n, sehinggga diperoleh persamaan:

$$\leftrightarrow \frac{\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \cdots - a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{\lambda^n} = \frac{0}{\lambda^n}$$

$$\leftrightarrow 1 - \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} - \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} - \cdots - \frac{a_3 b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{\lambda^n} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{\lambda^n} = 1 \tag{7}$$

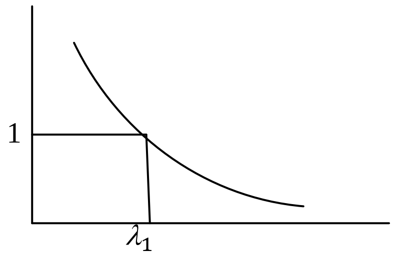
Dimisalkan sebuah persamaan polinomial

$$q(\lambda) = a_1\lambda^{-1} + a_2b_1\lambda^{-2} + a_3b_1b_2\lambda^{-3} + \cdots + a_ib_1b_2\cdots b_{i-1}\lambda^{-n} \quad (8)$$

Diperoleh

$q(\lambda) = 1$

Karena a_i dan b_i semuanya tidak negatif, jika nilai-nilai eigen Matriks Leslie λ_i di subtitusikan ke Persamaan (8), dimisalkan λ_i bernilai positif dari 0 sampai ∞ , maka nilai-nilai dari $q(\lambda_i)$ akan menuju nol dan monoton turun.



Gambar 1. Grafik Fungsi $q(\lambda)$

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh nilai dari masing-masing nilai eigen λ_i memiliki tepat satu nilai solusi di $q(\lambda_i)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai-nilai eigen dari Matriks Leslie berbeda antara satu dan yang lainnya dan terdapat λ yang positif bersifat tungggal misalkan $\lambda = \lambda_1$ dan $q(\lambda_1) = 1$ dan λ_1 memiliki kelipatan aljabar sama dengan satu.

Diberikan x_1 merupakan suatu vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ_1 yang memenuhi $(\lambda_1 I - A)x_1 = 0$, sehinnga diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 berbentuk.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b_1b_2b_3\cdots b_{i-2}}{\lambda_1^{n-2}} \\ \frac{b_1b_2b_3\cdots b_{i-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} t, \text{ dengan } t\epsilon R - \{0\} \quad (9)$$

Berdasarkan Persamaan (9) diperoleh bahwa ruang eigen dari x_1 memiliki dimensi satu dan λ_1 mempunyai kelipatan satu. Sehingga setiap vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 haruslah merupakan kelipatan dari x_1.

Teorema 1 [1]

Jika λ_1 adalah nilai eigen positif yang unik dari sebuah Matriks Leslie dan jika λ_i adalah sebarang nilai eigen real atau kompleks dari L, maka $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Definisi 2 [2]

Diberikan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A berukuran $n \times n$, λ_1 dikatakan nilai eigen dominan dari A jika $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$.

Dimisalkan Matriks Leslie A dapat didiagonalisasikan, maka terdapat nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dan memilki vektor eigen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Misalkan dibentuk matriks $P = [x_1|x_2|x_3|\cdots|x_n]$. Maka terdapat P^{-1} dan diagonalisasi matriks A berbentuk :

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$A^p = P\begin{bmatrix} \lambda_1{}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^p \end{bmatrix} P^{-1}$, untuk A^p dengan $p = 1,2,3,\ldots,n$.

Jika terdapat $n(t)$ vektor distribusi awal dari populasi dan telah diketahui bahwa $n(t+p) = A^p n(t)$, sehingga:

$$n(t+p) = P\begin{bmatrix} \lambda_1{}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^p \end{bmatrix} P^{-1} n(t)$$

Dimisalkan $P^{-1}n(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ (10)

jika entri di atas dikalikan, maka

$$n(t+p) = [x_1|x_2|x_3|\cdots|x_n]\begin{bmatrix} \lambda_1{}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow n(t+p) = [x_1|x_2|x_3|\cdots|x_n]\begin{bmatrix} \lambda_1{}^p c_1 \\ \lambda_2{}^p c_2 \\ \vdots \\ \lambda_n{}^p c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow n(t+p) = x_1\lambda_1{}^p c_1 + x_2\lambda_2{}^p c_2 + \cdots + x_n\lambda_n{}^p c_n \quad (11)$$

Akan ditunjukkan jika λ_1 merupakan nilai eigen dominan akan berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi. Kedua ruas dibagi dengan $\lambda_1{}^p$ sehingga persamaannya menjadi:

$$\frac{1}{\lambda_1{}^p} n(t+p) = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \end{bmatrix} P^{-1} n(t)$$

Diketahui bahwa λ_1 merupakan nilai eigen dominan dari Matriks Leslie, maka $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \leq 1$, untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$

dan diperoleh

$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p \to 0$ ketika $p \to \infty$.

Sehingga dibentuk sebuah limit:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} n(t+p) = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} n(t) \quad (12)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (10) ke Persamaan (12) diperoleh:

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} n(t+p) = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} n(t+p) = [x_1|x_2|x_3|\cdots|x_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} n(t+p) = [c_1 x_1] \quad (13)$$

Berdasarkan Persamaan (13) diperoleh suatu pendekatan

$$n(t+p) = c_1 \lambda_1{}^p x_1$$
$$\Leftrightarrow n((t+(p-1)) = c_1 \lambda_1{}^{p-1} x_1$$

Sedemikian hingga:

$$n(t+p) = c_1 \lambda_1{}^p x_1$$
$$\Leftrightarrow n(t+p) = \lambda_1{}^1 \lambda_1{}^{p-1} c_1 x_1$$

Diperoleh $n(t+p) = \lambda_1 n(t+(p-1))$ (14)

Persamaan (14) diperoleh bahwa, jika untuk nilai sebarang p yang menyatakan tahun berikutnya dalam populasi, jika diketahui $\lambda_1 = 1$ adalah nilai eigen yang dominan dari Matriks Leslie, maka didapat suatu kesimpulan bahwa vektor distribusi umur berikutnya akan selalu sama dengan vektor umur sebelumnya.

Akibatnya, jika $\lambda_1 < 1$ maka jumlah populasi pada semua kelas umur cenderung menurun. Jika $\lambda_1 = 1$ jumlah populasi pada semua kelas umurnya cenderung tetap. Jika $\lambda_1 > 1$ jumlah populasi pada semua kelas umurnya cenderung meningkat. Apabila jumlah populasi cendrung menurun maka dapat dikatakan juga bahwa laju pertumbuhan populasi menurun bernilai negatif, sedangkan apabila jumlah populasi meningkat dapat dikatakan juga bahwa laju pertumbuhan populasi bernilai positif.

Hasil Dan Pembahasan

Pada Tabel 1 berikut diberikan data jumlah penduduk perempuan pada Tahun 2007 dan 2012 yang dikelompokkan berdasarkan umurnya.

Tabel 1. Data Penduduk Perempuan Tahun 2007 dan Tahun 2012

Umur	Jumlah Perempuan Tahun 2007	Jumlah Perempuan Tahun 2012
0-4	270.400	337.470
5-9	253.300	305.875
10-14	228.300	283.664
15-19	210.100	278.420
20-24	236.300	279.067
25-29	276.500	267.845
30-34	264.400	257.760

35-39	191.000	227.798
40-44	139.800	184.718
45-49	105.500	143.771
50-54	75.400	107.980
55-59	51.300	73.910
60-64	34.200	47.811
65+	56.400	78.450

Berdasarkan data di atas, maka penduduk perempuan dapat dikelompokkan berdasarkan kelas umurnya seperti pada tabel berikut :

Tabel 2. Pengelompokan Penduduk Perempuan Berdasarkan Kelas Umur

Kelas Umur	Jumlah Perempuan Tahun 2007	Jmlh Anak yang Lahir Tahun 2007-2012	Jumlah Perempuan Tahun 2012
0-4	270.400	0	337.470
5-9	253.300	0	305.875
10-14	228.300	0	283.664
15-19	210.100	26.998	278.420
20-24	236.300	60.746	279.067
25-29	276.500	80.994	267.845
30-34	264.400	80.992	257.760
35-39	191.000	60.744	227.798
40-44	139.800	26.996	184.718
45-49	105.500	0	143.771
50-54	75.400	0	107.980

55-59	51.300	0	73.910
60-64	34.200	0	47.811
65+	56.400	0	78.450
Total	2.392.900	337.470	2.874.539

Model Matriks Leslie dapat digunakan untuk mengetahui jumlah populasi perempuan pada 7 tahun berikutnya. Dengan menggunakan Matriks Leslie, berdasarkan Tabel 3 populasi perempuan dibagi atas beberapa interval kelas umur, dengan interval umur kesuburan perempuan yaitu $15 - 44$ tahun. Untuk menghitung jumlah populasi perempuan dengan metode Matriks Leslie dipengaruhi oleh tingkat kesuburan (a_i) dan tingkat ketahanan hidup (b_i). Berikut merupakan langkah penyelesaian untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi perempuan di Provinsi Riau pada Tahun 2017.

Tabel 3. Tingkat Kesuburan dan Ketahanan Hidup Populasi Perempuan

Kelas Umur	a_i	b_i
0-4	0	1.1312
5-9	0	1.1199
10-14	0	1.2195
15-19	0.1285	1.3283
20-24	0.2571	1.1335
25-29	0.2929	0.9322
30-34	0.3063	0.8616
35-39	0.3180	0.9671
40-44	0.1931	1.0284
45-49	0	1.0235
50-54	0	0.9802
55-59	0	0.9334
60-64	0	2.29390
65+	0	-

Berdasarkan Tabel 3, diperoleh matriks Leslie berikut :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1285 & 0.2571 & 0.2929 & 0.3063 & 0.3180 & 0.1931 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1312 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1199 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2195 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3283 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1335 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9671 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0284 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0235 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9802 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9334 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2939 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah dibentuk Matriks Leslie, berdasarkan Persamaan (3) untuk memprediksi jumlah perempuan pada Tahun 2017 adalah :

$$n(t+2) = An(t+1)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1285 & 0.2571 & 0.2929 & 0.3063 & 0.3180 & 0.1931 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1312 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1199 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2195 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3283 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1335 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9671 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0284 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0235 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9802 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9334 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2939 & 0 \end{bmatrix}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. I, No. I, Juni 2016, pp.1 - 11
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$\begin{bmatrix} 337.470 \\ 305.875 \\ 283.664 \\ 278.420 \\ 279.067 \\ 267.845 \\ 257.760 \\ 227.798 \\ 184.718 \\ 143.771 \\ 107.980 \\ 73.910 \\ 47.811 \\ 78.450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 373.051 \\ 381.744 \\ 342.541 \\ 345.938 \\ 369.814 \\ 372.542 \\ 249.692 \\ 222.077 \\ 220.306 \\ 189.965 \\ 147.151 \\ 105.846 \\ 68.883 \\ 109.672 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan program Matlab, maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1856 \\ 0.5889 + 0.8089i \\ 0.5889 - 0.8089i \\ 0.0558 + 0.8388i \\ 0.0558 - 0.8388i \\ -0.4911 + 0.6602i \\ -0.4911 - 0.6602i \\ -0.7464 + 0.2391i \\ -0.7464 - 0.2391i \end{bmatrix}$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa jumlah populasi perempuan di Provinsi Riau cenderung mengalami peningkatan atau dengan kata lain laju pertumbuhan populasi tersebut cenderung bernilai positif. Pada Tabel 4 berikut akan disajikan jumlah populasi perempuan pada Tahun 2007 dan 2012 serta hasil prediksi jumlah populasi perempuan pada Tahun 2017.

Tabel 4. Data Jumlah Perempuan Pada Tahun 2017 dan Tahun 2012 Serta Hasil Prediksi Jumlah Perempuan Pada Tahun 2017

Kelas Umur	Jumlah Perempuan Tahun 2007	Jumlah Perempuan Tahun 2012	Prediksi Jmlh Perempuan Tahun 2017
0-4	270.400	337.470	373.051

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. I, No. I, Juni 2016, pp.1 - 11
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

5-9	253.300	305.875	381.744
10-14	228.300	283.664	342.541
15-19	210.100	278.420	345.938
20-24	236.300	279.067	369.814
25-29	276.500	267.845	372.542
30-34	264.400	257.760	249.692
35-39	191.000	227.798	222.077
40-44	139.800	184.718	220.306
45-49	105.500	143.771	189.965
50-54	75.400	107.980	147.151
55-59	51.300	73.910	105.846
60-64	34.200	47.811	68.832
65+	56.400	78.450	109.672
Jumlah	2.392.900	2.874.539	3.499.220

Daftar Pustaka

[1] Anton H. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima.* Jakarta: Erlangga.

[2] Pratama Y., Prihandono dan Kusumastuti. 2013. *Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi.* Jurnal Jurusan Matematika FMIPA UNTAN.

[3] Simanihuruk Mudin dan Hartanto. 2005. *Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Tiga.* Jurnal Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu.

[4] Yuliani, Selvia. 2012. *Penerapan Diagonalisasi Matriks dan Matriks Leslie dalam Memproyeksikan Jumlah Populasi Perempuan.* Skripsi Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.