

Analisis Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Adanya Infeksi Penyakit pada Mangsa

Fardinah¹, Hikmah², Fitriani³, Nadia Salsabila⁴

^{1,2,4} Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat, Majene, Indonesia

Jalan. Prof. Dr. Baharuddin Lopa, SH. Talumung, Majene Sulawesi Barat,

³ Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Majene, Indonesia

Jalan. Prof. Dr. Baharuddin Lopa, SH. Talumung, Majene Sulawesi Barat,

Email: fardinah@unsulbar.ac.id¹, hikmah@unsulbar.ac.id²

Korespondensi penulis : fardinah@unsulbar.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II dan adanya penyakit pada populasi mangsa. Diasumsikan bahwa infeksi penyakit hanya menyebar dalam populasi mangsa dan tidak dapat disembuhkan sehingga terdapat tiga subpopulasi dalam model yaitu mangsa rentan, mangsa terinfeksi dan pemangsa. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II dan adanya infeksi penyakit pada populasi mangsa, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model dan interpretasi model. Analisis kestabilan titik kesetimbangan diawali dengan metode linearisasi kemudian jenis kestabilan ditentukan berdasarkan karakteristik nilai eigen dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Hasil penelitian ini diperoleh 5 (lima) titik kesetimbangan yaitu kepunahan populasi, mangsa rentan eksis, kepunahan mangsa terinfeksi, kepunahan pemangsa dan populasi eksis. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa semua titik kesetimbangan stabil jika memenuhi syarat yang ditentukan. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan diperoleh interpretasi bahwa jika nilai parameter laju interaksi mangsa rentan dan mangsa terinfeksi serta laju kematian karena penyakit diubah maka dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan

Kata Kunci: model mangsa-pemangsa, Holling Tipe II, infeksi penyakit, linearisasi, kriteria Routh-Hurwitz

Abstract

This research discusses the predator-prey model with the Holling Type II response function and the presence of disease in the prey population. It is assumed that the disease infection only spreads within the prey population and cannot be cured so there are three subpopulations in the model, namely susceptible prey, infected prey and predators. This research aims to construct a prey-prey model with a Holling Type II response function and the presence of disease infection in the prey population, analyze the stability of the model equilibrium point and interpret the model. Analysis

of the stability of the equilibrium point begins with the linearization method, and then the type of stability is determined based on the characteristics of the eigenvalues using the Routh-Hurwitz criterion. The results of this research obtained 5 (five) equilibrium points, namely population extinction, vulnerable prey existing, extinction of infected prey, extinction of predators and existing population. The results of the equilibrium point analysis show that all equilibrium points are stable if they fulfill the specified conditions. Based on the numerical simulations carried out, the interpretation was obtained that if the parameter values of the interaction rate of susceptible prey and infected prey as well as the rate of death due to disease were changed, this could cause a change in the stability of the equilibrium point

Keywords: predator-prey model, Holling Type II, disease infection, linearization, criteria Routh-Hurwitz

1. Pendahuluan

Ekosistem dapat dirumuskan sebagai suatu sistem ekologi yang terbentuk oleh hubungan timbal balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Ekosistem terbentuk oleh faktor biotik, faktor abiotik dan hubungan atau interaksi antar keduanya. Keseimbangan suatu ekosistem akan terjadi jika komponen-komponen ekosistem dalam jumlah yang berimbang. Diantara komponen-komponen ekosistem terjadi interaksi, saling membutuhkan dan saling memberikan apa yang menjadi kebutuhannya. Keseimbangan tersebut harus tetap terjaga sehingga akan menjadi keberlanjutan dan aliran energi dalam ekosistem akan tetap terjaga [1].

Setiap makhluk hidup tidak terlepas untuk berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi terjadi ketika dua atau lebih spesies memiliki efek atau mempunyai pengaruh terhadap masing-masing spesies tersebut. Interaksi antara dua spesies dapat memiliki efek positif untuk keduanya, efek negatif untuk keduanya, atau efek negatif pada satu spesies dan efek positif pada spesies lainnya [2]. Salah satu bentuk interaksi antar spesies yaitu predasi. Predasi merupakan interaksi antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*) dimana *predator* memangsa *prey* untuk mempertahankan kelangsungan hidupnya dan peran predator terhadap mangsa adalah sebagai pengatur populasi mangsa [3].

Model mangsa-pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926 yang selanjutnya dikenal dengan model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra adalah model mangsa-pemangsa yang paling sederhana. Model mangsa-pemangsa kemudian terus mengalami perkembangan salah satunya adalah bentuk interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan fungsi respon. Fungsi respon dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan [4]. Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe I, tipe II dan tipe III [5].

Model yang diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra mengasumsikan populasi mangsa dan pemangsa dalam keadaan sehat sedangkan dalam kondisi nyata di lingkungan menunjukkan bahwa ada populasi mangsa dan pemangsa dalam keadaan sakit atau terinfeksi [6]. Oleh karena itu masalah epidemiologi merupakan salah satu topik yang menarik dan berkembang dalam pemodelan matematika selain model ekologi.

Pemodelan matematika dalam epidemiologi memberikan pemahaman tentang mekanisme mendasar yang mempengaruhi penyebaran penyakit. Berdasarkan hal tersebut sehingga dalam artikel ini dibahas mengenai model eko-epidemiologi yang merupakan gabungan antara model ekologi dan model epidemiologi.

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya yang telah mengkaji mengenai model ekologi maupun model eko-epidemiologi. Penelitian [7] mengkaji tentang model *predator-prey* dengan infeksi penyakit yang menyebar hanya pada populasi *predator* dan fungsi respon menggunakan holling tipe IV. Dalam penelitian tersebut diperoleh tiga titik kesetimbangan non negatif yang stabil dengan syarat tertentu. Selanjutnya penelitian [8] tentang analisis kestabilan model *predator-prey* dengan infeksi penyakit pada *prey* dan pemanenan proporsional pada *predator*. Dalam penelitian tersebut diasumsikan penyakit menyebar dalam populasi *prey* dan tidak dapat disembuhkan serta fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon holling tipe I. Hasil yang diperoleh yaitu terdapat lima titik kesetimbangan dengan titik kesetimbangan kepunahan populasi tidak akan pernah tercapai. Penelitian model eko-epidemiologi kemudian dikembangkan dalam [9] dengan menambahkan asumsi bahwa penyakit pada populasi mangsa dapat disembuhkan dan dihasilkan lima titik kesetimbangan dengan titik kesetimbangan kepunahan populasi tidak stabil. Selanjutnya [10] membahas model *predator-prey* dengan *prey* terinfeksi namun diasumsikan fungsi respon menggunakan Cowley Martin sedangkan penelitian [11] membahas model *predator-prey* dengan penyakit menyebar pada populasi *prey* dan *predator* hanya memangsa *prey* yang terinfeksi serta adanya pemanenan pada *prey*.

Berbeda dengan penelitian-penelitian tersebut, pada penelitian ini diasumsikan bahwa interaksi mangsa dan pemangsa mengikuti fungsi respon Holling tipe II, yang artinya pemangsa membutuhkan waktu dalam menangani mangsa. Tujuan penelitian ini yaitu mengkonstruksi model mangsa-pemangsa dengan mempertimbangkan adanya infeksi penyakit pada populasi mangsa, menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik untuk menkonfirmasi kesesuaian hasil perhitungan analisis kestabilan. Nilai parameter dalam simulasi numerik berasal dari jurnal penelitian dan beberapa diantaranya diasumsikan oleh peneliti.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan simulasi model dengan tahapan seperti pada Gambar 1 berikut :



Gambar 1. Prosedur Penelitian

Model Pertumbuhan Logistik

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, yaitu Pierre Verhulst pada tahun 1838. Model tersebut dirumuskan

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

dengan r laju pertumbuhan intrinsik dan K daya dukung lingkungan yang merupakan konstanta positif [12].

Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan. Fungsi respon dibagi atas tiga, yaitu fungsi respon Holling Tipe I, Tipe II dan Tipe III. Dalam penelitian ini digunakan fungsi respon Holling Tipe II yang dirumuskan sebagai $F^{(II)}(x) = \frac{ax}{1+bx}$ dengan a tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa, b waktu pencarian mangsa dan x jumlah populasi mangsa [13].

Model Mangsa-Pemangsa Lotka-Volterra

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Volterra pada tahun 1926. Jika x menunjukkan populasi mangsa pada waktu t dan y menunjukkan populasi pemangsa pada waktu t , maka model Volterra adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xy - \phi y\end{aligned}$$

dengan $K, \beta, r, \phi > 0$. Asumsi yang berlaku dalam model seperti terdapat dalam [14].

Kestabilan Titik Keseimbangan

Analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan dengan menentukan titik keseimbangan model terlebih dahulu sesuai dengan definisi titik keseimbangan dalam [15]. Selanjutnya dilakukan linierisasi sistem dengan menentukan matriks Jacobian untuk masing-masing titik keseimbangan. Jenis kestabilan ditentukan dengan menggunakan teorema hubungan antara nilai eigen matriks Jacobian dan kestabilan seperti dalam [16]. Dalam menentukan karakteristik akar persamaan atau nilai eigen tanpa perlu menyelesaikan persamaan digunakan kriteria Routh-Hurwitz [17].

3. Hasil dan Pembahasan

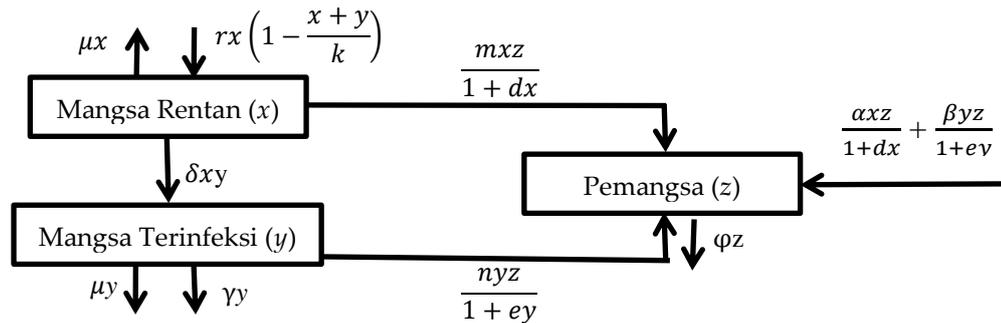
3.1 Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Adanya Infeksi Penyakit pada Mangsa

Asumsi yang digunakan dalam mengkonstruksi model yaitu sebagai berikut:

1. Terdapat infeksi penyakit pada mangsa sehingga populasi mangsa dapat dibedakan menjadi dua kompartemen yaitu kompartemen mangsa rentan dan kompartemen mangsa terinfeksi
2. Pertumbuhan pada populasi mangsa mengikuti pertumbuhan logistik
3. Hanya mangsa rentan yang dapat melakukan reproduksi dengan k sebagai daya dukung lingkungan bagi populasi mangsa.

4. Laju penyebaran penyakit pada populasi mangsa terjadi sebesar δ dan penyakit tidak dapat disembuhkan karena penyebarannya sangat cepat serta tingkat mortalitas yang tinggi namun tidak dilakukan pengobatan.
5. Pemangsa melakukan pemangsaan dengan fungsi respon Holling tipe II.
6. Pemangsa tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang ada pada mangsa karena penyakit hanya menyebar pada *genus* dan *family* tertentu pada hewan.

Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh konstruksi diagram kompartemen seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Diagram kompartemen model

Variabel dan parameter yang digunakan seperti dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Daftar variabel dan parameter yang digunakan dalam model

Notasi	Interpretasi
x	populasi mangsa rentan
y	populasi mangsa terinfeksi
z	populasi pemangsa
r	laju pertumbuhan intrinsik mangsa rentan
k	<i>carrying capacity</i> mangsa
δ	laju interaksi antara mangsa rentan dan mangsa terinfeksi
m	laju pemangsaan mangsa rentan oleh pemangsa
n	laju pemangsaan mangsa terinfeksi oleh pemangsa
γ	laju kematian karena penyakit
μ	koefisien kematian alami mangsa
φ	Koefisien kematian alami pemangsa
d	waktu penanganan mangsa rentan oleh pemangsa
e	waktu penanganan mangsa terinfeksi oleh pemangsa
α	laju konversi pertumbuhan dari mangsa rentan menjadi pemangsa
β	laju konversi pertumbuhan dari mangsa terinfeksi menjadi pemangsa

Berdasarkan diagram kompartemen, diperoleh Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Adanya Infeksi Penyakit pada Mangsa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x+y}{k}\right) - \frac{mxz}{1+dx} - \delta xy - \mu x \\
 \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \frac{nyz}{1+ey} - \gamma y - \mu y \\
 \frac{dz}{dt} &= \frac{\alpha xz}{1+dx} + \frac{\beta yz}{1+ey} - \varphi z
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan $r, k, m, n, \delta, \gamma, \mu, d, e, \alpha, \varphi$ dan $\beta \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Titik Keseimbangan Model

Didefinisikan $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Titik kesetimbangan dari sistem (1) adalah solusi dari sistem (1) yang memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan dari sistem (1) ditentukan melalui persamaan berikut:

$$\begin{aligned} rx \left(1 - \frac{x+y}{k}\right) - \frac{mxz}{1+dx} - \delta xy - \mu x &= 0 \\ \delta xy - \frac{nyz}{1+ey} - \gamma y - \mu y &= 0 \\ \frac{\alpha xz}{1+dx} + \frac{\beta yz}{1+ey} - \varphi z &= 0. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan Sistem (1) sebagai berikut:

- i. Titik kesetimbangan kepunahan populasi $E_0(0,0,0)$.
- ii. Titik kesetimbangan mangsa rentan eksis $E_1\left(\frac{k(r-\mu)}{r}, 0, 0\right)$ dengan $r > \mu$.
- iii. Titik kesetimbangan kepunahan mangsa terinfeksi $E_2\left(\frac{\varphi}{\alpha-d\varphi}, 0, \frac{\alpha(kd\mu\varphi+k\alpha r-kdr\varphi-k\alpha\mu-r\varphi)}{km(\alpha-d\varphi)^2}\right)$ dengan $\alpha > d\varphi$ dan $kd\mu\varphi + k\alpha r > kdr\varphi + k\alpha\mu + r\varphi$.
- iv. Titik kesetimbangan kepunahan pemangsa $E_3\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{kd\mu+kdr-\gamma r}{\delta(K\delta+r)}, 0\right)$ dengan $kd\mu + kdr > \gamma r$.
- v. Titik kesetimbangan populasi eksis $E_4(x^*, y^*, z^*)$ dengan x^* adalah akar positif dari $aenr + \beta dnr - denr\varphi)x^2 + (kdenr\varphi + k\alpha e\mu n + k\beta d\mu n + kd\delta n\varphi + k\beta\delta m + dnr\varphi + \beta nr - kde\mu n\varphi - k\alpha enr - k\beta dnr - k\alpha\delta n - enr\varphi - \alpha nr)x + (kenr\varphi + k\beta\mu n + k\delta n\varphi + nr\varphi - ke\mu n\varphi - k\beta\gamma m - k\beta nr) = 0$ dengan $rk - \mu k - rx^* - \frac{mkz^*}{1+dx^*} > 0$ dan $(\delta x^* - (\gamma + \mu))(1 + ey^*) > 0$.

3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model

Untuk mengidentifikasi kestabilan titik kesetimbangan, dilakukan pelinearannya terhadap sistem (1). Hasil pelinearannya memberikan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2x+y}{k}\right) - \frac{mz}{(1+dx)^2} - \delta y - \mu & -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x & -\frac{mx}{1+dx} \\ \delta y & \delta x - \frac{nz}{(1+ey)^2} - (\gamma + \mu) & -\frac{ny}{1+ey} \\ \frac{\alpha z}{(1+dx)^2} & \frac{\beta z}{(1+ey)^2} & \frac{\alpha x}{1+dx} + \frac{\beta y}{1+ey} - \varphi \end{bmatrix}$$

Substitusi titik kesetimbangan $E_0(0,0,0)$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} r - \mu & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $|\lambda I - J_{E_0}| = 0$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r - \mu$, $\lambda_2 = -(\gamma + \mu)$ dan $\lambda_3 = -\varphi$. Jadi titik kesetimbangan E_0 stabil dengan syarat $r < \mu$.

Substitusi titik kesetimbangan $E_1\left(\frac{k(r-\mu)}{r}, 0, 0\right)$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} \mu - r & \left(1 + \frac{\delta k}{r}\right)(\mu - r) & \frac{mk(\mu - r)}{r + dk(r - \mu)} \\ 0 & \frac{\delta k(r - \mu)}{r} - (\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha k(r - \mu)}{r + dk(r - \mu)} - \varphi \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $|\lambda I - J_{E_1}| = 0$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \mu - r$, $\lambda_2 = \frac{\delta k(r - \mu)}{r} - (\gamma + \mu)$ dan $\lambda_3 = \frac{\alpha k(r - \mu)}{r + dk(r - \mu)} - \varphi$. Dengan demikian titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal dengan syarat $\frac{\delta k(r - \mu)}{r(\gamma + \mu)} < 1$ dan $\frac{\alpha k(r - \mu)}{\varphi(r + dk(r - \mu))} < 1$.

Substitusi titik kesetimbangan $E_2(x^*, 0, z^*)$ dengan $x^* = \frac{\varphi}{\alpha - d\varphi}$ dan $z^* = \frac{\alpha(kd\mu\varphi + kar - kdr\varphi - k\alpha\mu - r\varphi)}{km(\alpha - d\varphi)^2}$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \frac{mx^*}{(1 + dx^*)^2} - \mu & -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^* & -\frac{mx^*}{1 + dx^*} \\ 0 & \delta x^* - nz^* - (\gamma + \mu) & 0 \\ \frac{az^*}{(1 + dx^*)^2} & \beta z^* & \frac{\alpha x^*}{1 + dx^*} - \varphi \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $|\lambda I - J_{E_2}| = 0$ diperoleh persamaan karakteristik $(\lambda - D)\left[\lambda^2 - (A + G)\lambda + (AG - EC)\right] = 0$ dengan $A = r\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \frac{mx^*}{(1 + dx^*)^2} - \mu$, $B = -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^*$, $C = -\frac{mx^*}{1 + dx^*}$, $D = \delta x^* - nz^* - (\gamma + \mu)$, $E = \frac{az^*}{(1 + dx^*)^2}$, $F = \beta z^*$ dan $G = \frac{\alpha x^*}{1 + dx^*} - \varphi$. Dengan demikian diperoleh $\lambda = D$ atau $\lambda^2 - (A + G)\lambda + (AG - EC) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_2 stabil jika $D < 0$, $A < -G$, dan $AG > EC$.

Substitusi titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, 0)$ dengan $x^* = \frac{\gamma}{\delta}$ dan $y^* = \frac{kd\mu + kdr - \gamma r}{\delta(k\delta + r)}$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_3} = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2x^* + y^*}{k}\right) - \delta y^* - \mu & -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^* & -\frac{mx^*}{1 + dx^*} \\ \delta y^* & \delta x^* - (\gamma + \mu) & -\frac{ny^*}{1 + ey^*} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha x^*}{1 + bd} + \frac{\beta y^*}{1 + ey^*} - \varphi \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $|\lambda I - J_{E_3}| = 0$ diperoleh persamaan karakteristik $(\lambda - Q)\left[\lambda^2 - (K + O)\lambda + (KO - LN)\right] = 0$ dengan $K = r\left(1 - \frac{2x^* + y^*}{k}\right) - \delta y^* - \mu$, $L = -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^*$, $M = -\frac{mx^*}{1 + dx^*}$, $N = \delta y^*$, $P = \delta x^* - (\gamma + \mu)$ dan $Q = \frac{\alpha x^*}{1 + bd} + \frac{\beta y^*}{1 + ey^*} - \varphi$. Sehingga diperoleh $\lambda = Q$ atau $\lambda^2 - (K + O)\lambda + (KO - LN) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik lokal jika $Q < 0$, $K < -O$, dan $KO > LN$.

Substitusi titik kesetimbangan E_4 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_4} = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2x^* + y^*}{k}\right) - \frac{mz^*}{(1+dx^*)^2} - \delta y^* - \mu & -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^* & -\frac{mx^*}{1+dx^*} \\ \delta y^* & \delta x^* - \frac{nz^*}{(1+ey^*)^2} - (\gamma + \mu) & -\frac{ny^*}{1+ey^*} \\ \frac{\alpha z^*}{(1+dx^*)^2} & \frac{\beta z^*}{(1+ey^*)^2} & \frac{\alpha x^*}{1+dx^*} + \frac{\beta y^*}{1+ey^*} - \varphi \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $|\lambda I - J_{E_3}| = 0$ diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^3 + R\lambda^2 + S\lambda + T = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_5 stabil asimtotik lokal jika $R < 0, T > 0$ dan $\frac{T-RS}{R} > 0$ dengan

$$R = -(J_{11} + J_{12} + J_{13}),$$

$$S = J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} + J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32} - J_{12}J_{21} + J_{12}J_{21}J_{33},$$

$$T = J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32} + J_{11}J_{23}J_{32} - J_{13}J_{22}J_{31},$$

$$J_{11} = r \left(1 - \frac{2x^* + y^*}{k}\right) - \frac{mz^*}{(1+dx^*)^2} - \delta y^* - \mu, J_{12} = -\left(\frac{r}{k} + \delta\right)x^*, J_{13} = -\frac{mx^*}{1+dx^*}, J_{21} =$$

$$\delta y^*, J_{22} = \delta x^* - \frac{nz^*}{(1+ey^*)^2} - (\gamma + \mu), J_{23} = -\frac{ny^*}{1+ey^*}, J_{31} = \frac{\alpha z^*}{(1+dx^*)^2}, J_{32} = \frac{\beta z^*}{(1+ey^*)^2}, \text{ dan}$$

$$J_{33} = \frac{\alpha x^*}{1+dx^*} + \frac{\beta y^*}{1+ey^*} - \varphi.$$

3.4 Simulasi dan Interpretasi Model

Berikut diberikan simulasi dan interpretasi sistem (1) untuk mengkonfirmasi hasil analisis titik kesetimbangan yang telah diperoleh sebelumnya. Untuk simulasi titik kesetimbangan E_0 , penentuan nilai parameter $r, m, n, \delta, \mu, d, \alpha, k$ dan β berdasarkan [8] dan [10] sedangkan nilai d, e dan γ diasumsikan. Karena keterbatasan data yang ada, penentuan nilai parameter pada simulasi titik kesetimbangan E_1, E_2, E_3 dan E_4 disesuaikan dengan kondisi kestabilan yang diberikan pada hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan yang telah diperoleh pada bagian 3.3.

Untuk mengkonfirmasi hasil analisis titik kesetimbangan E_0 digunakan nilai parameter yaitu $r = 0.1, k = 100, m = 0.2, n = 0.2, \delta = 0.2, \gamma = 0.05, \mu = 0.3, d = 0.2, e = 0.2, \alpha = 0.3$, dan $\beta = 0.1$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_0 (x, y, z) = (0, 0, 0)$.

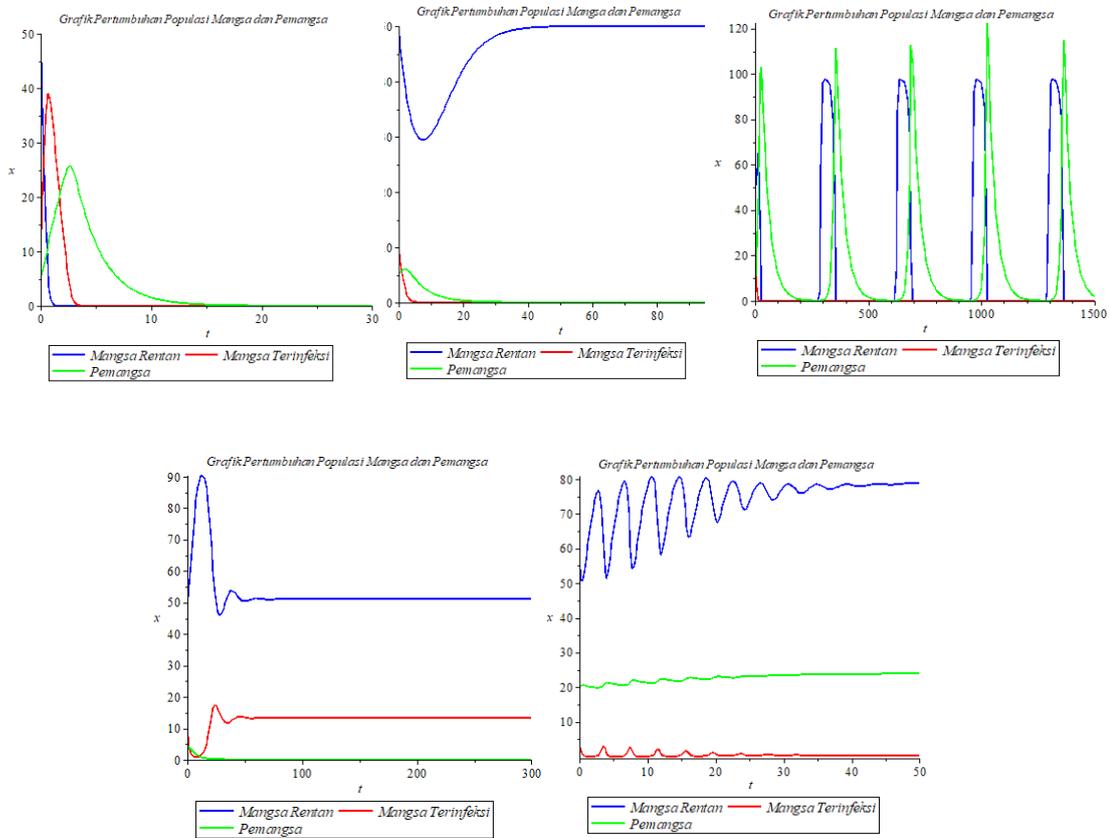
Parameter yang digunakan pada simulasi E_1 yaitu $r = 0.4, k = 100, m = 0.2, n = 0.2, \delta = 0.002, \gamma = 0.05, \mu = 0.2, d = 0.2, e = 0.2, \alpha = 0.03$, dan $\beta = 0.1$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_1 (x, y, z) = (49.13, 0, 0)$. Hasil simulasi diberikan dalam Gambar 2(b).

Parameter yang digunakan pada simulasi E_2 yaitu $r = 0.5, k = 100, m = 0.05, n = 0.02, \delta = 0.01, \gamma = 0.5, \mu = 0.01, d = 0.2, e = 0.1, \alpha = 0.03$, dan $\beta = 0.01$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_2 (x, y, z) = (1.25, 0, 12.09)$.

Parameter yang digunakan pada simulasi E_3 yaitu $r = 0.4, k = 100, m = 0.1, n = 0.2, \delta = 0.01, \gamma = 0.5, \mu = 0.01, d = 0.2, e = 0.1, \alpha = 0.03$, dan $\beta = 0.01$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_3 (x, y, z) = (50.7, 12.36, 0)$.

Parameter yang digunakan pada simulasi E_4 yaitu $r = 1, k = 100, m = 0.01, n = 1, \delta = 0.3, \gamma = 0.001, \mu = 0.001, d = 0.01, e = 0.05, \alpha = 0.002$, dan $\beta = 0.05$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_4 (x, y, z) = (77.75, 0.58, 23.67)$.

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan, diperoleh grafik pertumbuhan populasi seperti pada Gambar 3 sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa berdasarkan titik kesetimbangan E_0 (a), E_1 (b), E_2 (c), E_3 (d) dan E_4 (e)

Gambar 3(a) terlihat bahwa pada awal waktu populasi mangsa rentan mengalami peningkatan karena adanya laju pertumbuhan intrinsik. Namun seiring berjalannya waktu populasi mangsa rentan terus berkurang karena laju kematian alami yang lebih tinggi dari pada laju pertumbuhan intrinsik. Penurunan populasi mangsa rentan ini juga diikuti oleh berkurangnya populasi mangsa terinfeksi dan populasi pemangsa. Untuk waktu yang menuju tak hingga, populasi menuju kepunahan. Hasil ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan bahwa E_0 stabil.

Gambar 3(b) menunjukkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa rentan berkurang karena banyaknya jumlah pemangsa. Akibatnya jumlah populasi mangsa terinfeksi juga berkurang. Namun seiring berjalannya waktu populasi mangsa rentan terus bertambah karena laju pertumbuhan intrinsik yang lebih besar dari kematian alami. Sedangkan populasi mangsa terinfeksi dan pemangsa terus berkurang hingga menuju kepunahan. Hasil ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan E_1 stabil.

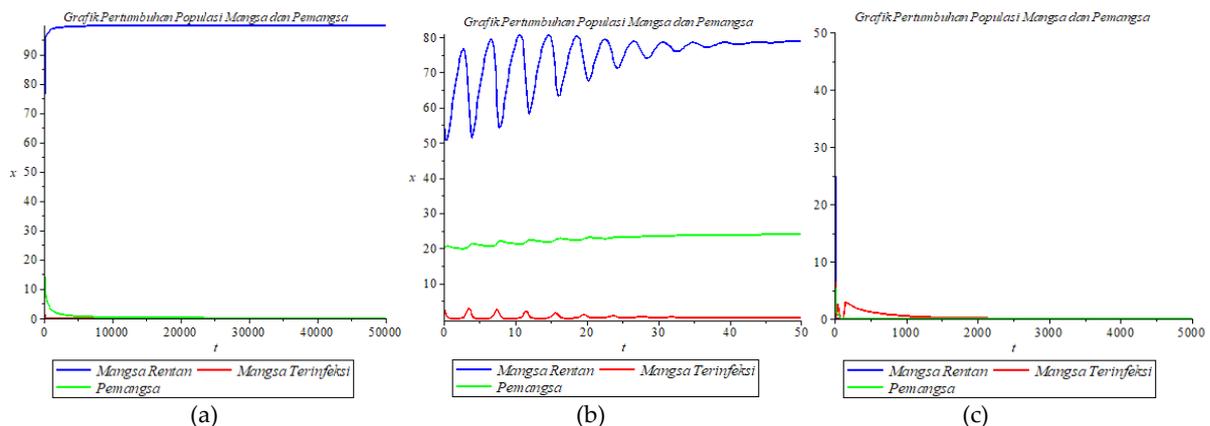
Gambar 3(c) terlihat bahwa pada awal waktu populasi mangsa rentan mengalami peningkatan karena adanya laju pertumbuhan intrinsik. Namun seiring berjalannya waktu populasi mangsa rentan terus berkurang karena adanya mangsa yang terinfeksi dan laju pemangsaan. Penurunan populasi mangsa rentan ini juga diikuti oleh

berkurangnya populasi mangsa terinfeksi dan populasi pemangsa. Untuk waktu yang menuju tak hingga, populasi mangsa terinfeksi menuju kepunahan. Hasil ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan bahwa E_2 stabil.

Gambar 3(d) menunjukkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa rentan mengalami peningkatan karena adanya laju pertumbuhan intrinsik. Namun seiring berjalannya waktu populasi mangsa rentan terus berkurang karena adanya mangsa yang terinfeksi. Penurunan populasi mangsa rentan ini juga diikuti oleh berkurangnya populasi pemangsa karena berkurangnya pemangsaan. Untuk waktu yang menuju tak hingga, populasi pemangsa menuju kepunahan. Hasil ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan bahwa E_3 stabil.

Gambar 3(e) menunjukkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa rentan dan mangsa terinfeksi turun akibat adanya pemangsaan sehingga populasi pemangsa mengalami peningkatan. Namun seiring berjalannya waktu pertumbuhan ketiga populasi mengalami osilasi hingga pada waktu yang menuju tak hingga ketiga populasi masih eksis. Hasil ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan bahwa E_4 stabil.

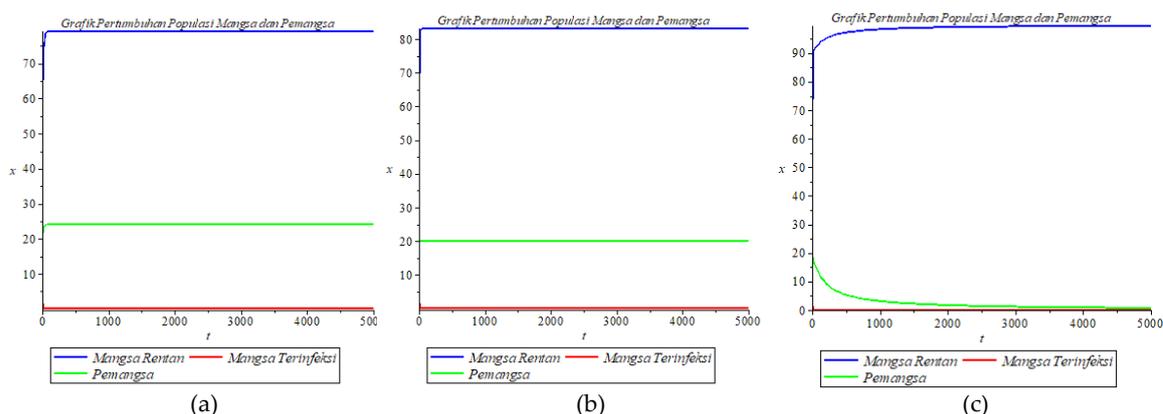
Selanjutnya dilakukan simulasi untuk melihat dinamika pertumbuhan populasi dengan menentukan laju interaksi antara mangsa rentan dan mangsa terinfeksi (δ) sebagai kontrol. Dalam hal ini dilakukan simulasi dengan tiga nilai berbeda yaitu $\delta = 0.03$, $\delta = 0.3$ dan $\delta = 3$. Simulasi untuk masing-masing nilai δ diberikan dalam Gambar 4 berikut:



Gambar 4. Grafik pertumbuhan populasi dengan $\delta = 0.03$ (a), $\delta = 0.3$ (b) dan $\delta = 3$ (c)

Dari Gambar 4 tersebut terlihat bahwa pada saat laju interaksi mangsa rentan dan mangsa terinfeksi ditentukan sebesar 0.3 maka pertumbuhan populasi stabil menuju ke titik kesetimbangan populasi eksis. Sedangkan jika laju interaksi diperkecil menjadi 0.03 maka sistem stabil ke titik kesetimbangan mangsa rentan eksis dan jika laju interaksi diperbesar menjadi 3 maka sistem stabil ke titik kesetimbangan populasi punah. Berdasarkan simulasi tersebut diperoleh bahwa jika nilai parameter laju interaksi mangsa rentan dan mangsa terinfeksi (δ) diubah maka dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk melihat dinamika pertumbuhan populasi dengan mengambil parameter kematian karena penyakit (γ) sebagai kontrol. Dalam hal ini dilakukan simulasi dengan tiga nilai berbeda yaitu $\gamma = 0$, $\gamma = 5$ dan $\gamma = 10$. Simulasi untuk masing-masing nilai γ diberikan dalam Gambar 5 sebagai berikut:



Gambar 5. Grafik pertumbuhan populasi dengan $\gamma = 0$ (a), $\gamma = 5$ (b) dan $\gamma = 10$ (c)

Berdasarkan Gambar 5 terlihat bahwa pada saat tidak ada kematian karena penyakit yaitu $\gamma = 0$ maka pertumbuhan populasi stabil menuju ke titik kesetimbangan populasi eksis. Sedangkan jika laju kematian karena penyakit diperbesar menjadi 5 maka sistem masih stabil ke titik kesetimbangan populasi eksis namun populasi mangsa rentan meningkat sedangkan populasi mangsa terinfeksi menurun dan jika laju kematian karena penyakit diperbesar menjadi 10 maka sistem stabil ke titik kesetimbangan populasi mangsa terinfeksi punah. Berdasarkan simulasi tersebut diperoleh bahwa jika nilai parameter laju kematian karena penyakit (γ) diubah maka dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan.

4. Kesimpulan

Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Adanya Infeksi Penyakit pada Mangsa seperti ditunjukkan pada sistem (1). Berdasarkan sistem tersebut diperoleh 5 (lima) titik kesetimbangan yaitu kepunahan populasi, mangsa rentan eksis, kepunahan mangsa terinfeksi, kepunahan pemangsa dan populasi eksis. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa semua titik kesetimbangan stabil jika memenuhi syarat yang ditentukan. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan diperoleh interpretasi bahwa jika nilai parameter laju interaksi mangsa rentan dan mangsa terinfeksi (δ) serta laju kematian karena penyakit (γ) diubah maka dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan.

Daftar Pustaka

- [1] R. Effendi, H. Salsabila, and A. Malik, "Pemahaman tentang lingkungan berkelanjutan, " *Abstract and Applied Analysis*, vol. 18, no. 2, doi: 10.14710/md1.18.2.20218.75-82.
- [2] S. N. Afyah, "Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Holling Tipe II", *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, vol. 9, no. 2, 2015, pp. 27–29.
- [3] S. Saadah, et al., "Model Interaksi Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Rasio Dependent Holling Tipe II dan Perilaku Anti Pemangsa", *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 7, no. 2, 2019.
- [4] P. Panja, S.K. Mondal and J. Chattopadhyay, "Dynamical Effects of Anti-Predator Behaviour of Adult Prey in a Predator-Prey Model with Ratio-Dependent

- Functional Response”, *Asian Journal of Mathematics and Physics*, vol.1, pp. 19–32, 2017.
- [5] S. G. Mortoja, P. Panja and S.K. Mondal, “Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior”, *Informatics in Medicine Unlocked*, vol.10, pp. 50–57, 2018.
- [6] K. Mu'tamar and Zulkarnain, "Model Predator-Prey dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Prey". *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, vol. 15, no. 1, pp. 1-6, 2017.
- [7] A. M. A. Siddik, S. Toaha, and A. M. Anwar, “Stability Analysis of Prey-Predator Model With Holling Type IV Functional Response and Infectious Predator”, vol. 17, no. 2, pp. 155–165, 2021.
- [8] S. Maisaroh, Resmawan dan E. Rahmi, “Analisis Kestabilan Model Pemangsa-Mangsa dengan Infeksi Penyakit pada Mangsa dan Pemanenan Proporsional pada Pemangsa”, *Jambura J. Biomath.* vol. 1, pp. 8-15, 2020.
- [9] F. Ni'mah and D. Savitri, “Analisis Kestabilan Model Eko-epidemiologi dengan Fungsi Respon Holling Tipe I”, vol. 10, no. 1, 2022, doi: <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v10n1.p1-12>.
- [10] Miswanto, N. Suroiyah dan Windarto, "Model Predator Prey Leslie Gower dengan Respon Crowley Martin dan Prey Terinfeksi serta Faktor Ketakutan", *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 20, no. 3, 2023, doi: <http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i3.18530>
- [11] G. E. Waldhani dan Chalimatusadiah, "Bifurkasi Hopf pada Model Dinamik S-I-P dengan Penyakit pada Populasi Prey dan Fungsi Respon Holling Type II dengan Pemanenan pada Prey", *Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 12, no. 03, 2024
- [12] N. L. Aufaniyah and Abadi, “Dynamics of Prey-Predator Interaction with Type II Holling Response Function, Additional Food, and Anti-Predator Behavior”, vol. 11, no. 3, pp. 422–433, 2023, doi: <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n3.p422-433>.
- [13] S. H. Arsyad, et al, “Analisis Model Pemangsa Mangsa Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada Pemangsa”, *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 1-16, 2020.
- [14] A. Mufidah and D. Savitri, “Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Makanan Tambahan Pada Pemangsa Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe IV,” *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 07, no. 01, pp. 80–94, 2023.
- [15] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, New-York, USA, 1990.
- [16] L. Perko, *Differential Equation and Dynamical System*, New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [17] F. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, 2020.