Jurnal Sains Matematika dan Statistika
p-ISSN: 2460-4542
e-ISSN: 2615-8663
Vol 11 No 2, Juli 2025

Invers Matriks RLPrFrLcirc $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ Menggunakan Matriks Blok 2×2

Ade Novia Rahma[1], Asyura Nurislam[2], Fitri Aryani[3], Corry Corazon Marzuki[4]

[1,2,3,4] Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id[1], 11950424347@uin-suska.ac.id[2]

Submitted : 24 Januari 2024 Accepted : 21 Juli 2025 Published : 24 Juli 2025

Abstrak

Matriks *circulant* merupakan matriks persegi yang memiliki sifat khusus, yaitu setiap barisnya merupakan pergeseran siklik (*circular shift*) ke kanan dari baris sebelumnya sehingga entri pada diagonalnya bernilai sama. Matriks *circulant* terdiri dari beberapa jenis, salah satunya adalah Matriks RLPrFrLcirc. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum invers matriks RLPrFrLcirc $(0, \dots, 0, a, a)$ ordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan matriks blok 2×2 dengan menerapkan komplemen *schur*. Bentuk umum yang diperoleh akan diaplikasikan ke dalam contoh soal sesuai dengan Teorema yang didapatkan. Hasil ini penting karena memberikan pendekatan sistematis dalam menentukan invers matriks jenis khusus secara lebih efisien dan terstruktur, yang dapat dimanfaatkan dalam berbagai aplikasi matematika dan komputasi.

Kata Kunci: blok $\mathbf{2 \times 2}$, invers matriks, komplemen *schur*, matriks RLPrFrLcirc.

Abstract

The circulant matrix is a square matrix that has special properties, namely each row is a cyclic shift (circular shift) to the right of the previous row so that the entries on the diagonal are of the same value. Circulant matrices consist of several types, one of which is the RLPrFrLcirc Matrix. This research aims to determine the general form of the inverse matrix RLPrFrLcirc $(0, \dots, 0, a, a)$ *of order* $n \times n$ *with* $n \geq 3$ *using a* 2×2 *block matrix by applying Schur's complement. The general form obtained will be applied to the example problem according to the theorem obtained. This result is important because it provides a systematic approach in determining the inverse of a special type of matrix in a more efficient and structured manner, which can be utilized in various mathematical and computational applications.*

***Keywords*:** *blok* $\mathbf{2 \times 2}$, *matrix inverse, schur complement, RLPrFrLcirc matrix.*

1. Pendahuluan

Matriks merupakan suatu jajaran dari bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang [1]. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, pembahasan tentang matriks telah mengalami beberapa kemajuan yang mana salah satu jenis matriks yang sering dibahas adalah matriks *circulant*. Matriks circulant adalah matriks berukuran $n \times n$ yang dibentuk dari sebuah vektor berisi n elemen sebagai baris pertama. Baris-baris selanjutnya diperoleh dengan menggeser elemen-elemen vektor tersebut secara siklik ke kanan sebanyak satu posisi untuk setiap baris [2]. Beberapa contoh matriks *circulant* adalah matriks $FLScirc_r$ [3], matriks $FLDcirc_r$ [4], matriks $RSLPFLcirc_r$ [5], matriks $RSFPLRcirc_r$ [5], matriks $RFPrLrRcirc_r$ [6], matriks $RLPrFrLcirc_r$ [6].

Salah satu operasi penting yang sering dilakukan pada matriks circulant adalah penentuan invers matriks, mengingat peranannya yang signifikan dalam berbagai bidang seperti komputasi numerik, sistem linier, hingga kriptografi. Berbagai penelitian telah dilakukan untuk mencari bentuk invers dari jenis-jenis khusus matriks circulant. Penelitian [7] yang mengkaji persoalan mengenai invers matriks pada $RSFPLcirc_r$ menggunakan operasi baris elementer (OBE). Selanjutnya penelitian [8] dan [9] menerapkan metode matriks blok 2×2 untuk menentukan invers matriks $FLScirc_r$ dan $FLDcirc_r$ dengan struktur khusus tertentu. Selanjutnya [10] membahas invers matriks $RSLPFLcirc_r$ berbentuk $(b, 0, \dots, 0, b)$, sedangkan penelitian [11] mengkaji invers matriks $RFPrLrRcirc_r$ berbentuk $(a, a, 0, \dots, 0)$ dengan pendekatan yang sama.

Namun demikian, hingga saat ini belum ditemukan penelitian yang secara khusus membahas invers dari matriks $RLPrFLcirc_r$ dengan bentuk khusus $(0, \dots, 0, a, a)$ menggunakan metode matriks blok 2×2 dan komplemen Schur. Hal ini menunjukkan adanya celah (gap) dalam kajian matriks circulant yang dapat dieksplorasi lebih lanjut. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menyusun bentuk umum invers dari matriks $RLPrFLcirc_r$ dengan bentuk khusus $(0, \dots, 0, a, a)$ untuk ordo $n \times n$ $n \geq 3$ menggunakan pendekatan matriks blok 2×2. Hasil yang diperoleh diharapkan dapat memperluas pemahaman terhadap invers matriks circulant serta menjadi kontribusi dalam pengembangan teori dan aplikasinya di bidang matematika terapan.

Berdasarkan uraian dan penelitian- penelitian sebelumnya, maka penulis tertarik meneliti mengenai invers matriks $RLPrFLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ menggunakan matriks blok 2×2 dengan bentuk khususnya sebagai berikut:

$$R_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix}, \text{ dengan } a, r \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0$$

2. Metode Penelitian

Definisi 1 [6] Matriks $RLPrFrLcirc_r$ (*Row Last Plus First Left Circulant*) merupakan suatu matriks *circulant* yang berbentuk persegi dengan baris pertamanya adalah $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ dengan bentuk umum yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} + ra_0 & ra_0 \\ a_2 & \cdots & ra_0 + ra_1 & ra_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + ra_0 & \cdots & ra_{n-3} + ra_{n-2} & ra_{n-2} \end{bmatrix}$$

dan dinotasikan sebagai $A = RLPrFrLcirc_r\,(a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$, dengan bentuk umum yang apabila diperluas akan memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} + ra_0 & ra_0 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + ra_0 & ra_0 + ra_1 & ra_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} + ra_0 & \dots & ra_{n-5} + ra_{n-4} & ra_{n-4} + ra_{n-3} & ra_{n-3} \\ a_{n-1} + ra_0 & ra_0 + ra_1 & \dots & ra_{n-4} + ra_{n-3} & ra_{n-3} + ra_{n-2} & ra_{n-2} \end{bmatrix}$$

dan dinotasikan sebagai $A = RLPrFrLcirc_r\,(a_0, a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$.

Definisi 2 [12] Matriks blok 2×2 merupakan suatu matriks persegi yang terbentuk atas submatriks dari dua baris dan dua kolom. Bentuk umum matriks blok 2×2 yaitu:
Dimisalkan P adalah suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks pada Persamaan (4) diblok atau dipartisi dengan menyelipkan garis di antara baris dan kolomnya secara vertikal dan horizontal sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

diperoleh beberapa submatriks, dengan pemisalan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks P terdiri dari 4 submatriks, yaitu:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definisi 3 [13] Kompelen *schur* adalah metode yang digunakan untuk menganalisis matriks yang mengandung pertidaksamaan. Komplemen *schur* biasanya digunakan dalam permasalahan pada matriks persegi yang ukurannya besar hanya matriks tersebut telah dipartisi.

Diberikan matriks:

$$P_{(k+l)(m+n)} = \begin{pmatrix} A_{k\times m} & B_{k\times n} \\ C_{l\times m} & D_{l\times n} \end{pmatrix}$$

1. Apabila A merupakan suatu matriks yang sifatnya *invertible*, maka komplemen *schur* yang dapat diperoleh dari A adalah $D - CA^{-1}B$.
2. Apabila B merupakan suatu matriks yang sifatnya *invertible*, maka komplemen *schur* yang dapat diperoleh dari B adalah $C - DB^{-1}A$.
3. Apabila C merupakan suatu matriks yang sifatnya *invertible*, maka komplemen *schur* yang dapat diperoleh dari C adalah $B - AC^{-1}D$.
4. Apabila D merupakan suatu matriks yang sifatnya *invertible*, maka komplemen *schur* yang dapat diperoleh dari D adalah $A - BD^{-1}C$.

Definisi 4 [1] Apabila A dan B merupakan suatu matriks persegi yang mempunyai ukuran yang sama dan diperoleh $AB = BA = I$ dengan I adalah suatu matriks identitas, maka A merupakan matriks yang memiliki invers atau *invertible* dengan B dikatakan sebagai invers dari A dengan notasi $A^{-1} = B$.

Definisi 5 [14] Suatu matriks persegi P yang non *singular* mempunyai invers P^{-1} dapat diblok menjadi blok 2×2 dengan cara:

$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Untuk mengalikan matriks P dengan matriks P^{-1} dan matriks P^{-1} dengan matriks P, maka matriks blok tersebut tidak boleh memiliki ukuran yang sembarang. Dimisalkan ukuran matriks blok A, B, C dan D dengan ukuran berturut-turutnya adalah $k \times m$,$k \times n$, $l \times m$ dan $l \times n$ dengan $k + l = m + n$. Selanjutnya untuk ukuran matriks blok E, F, G dan H harus berturut-turut menjadi $m \times k$, $m \times l$, $n \times k$, dan $n \times l$. Sehingga bisa disimpulkan bahwa P^{-1} berada pada partisi transpos dari P.

Dalam langkah ini, maka bisa dibentuk rumus untuk E, F, G dan H berdasarkan A, B, C dan D. Jika salah satu blok pada matriks blok A, B, C dan D merupakan matriks persegi non *singular* sehingga agar menghindari bentuk invers yang diperumum, maka terdapat tiga kemungkinan blok antara lain:

1. Blok diagonal persegi: $k = m$ dan $l = n$.
2. Kuadrat blok diagonal: $k = n$ dan $l = m$.
3. Semua blok persegi: $k = l = m = n$.

Teorema 1 [14] Apabila P adalah suatu matriks persegi, maka:

1. Syarat cukup dan perlu agar $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah A dan D memiliki invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.
2. Syarat cukup dan perlu agar $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah B dan C memiliki invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2 [14] Dimisalkan P adalah suatu matriks persegi, maka:

1. Syarat cukup dan perlu agar $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah A dan D memiliki invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.
2. Syarat cukup dan perlu agar $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah A dan D memiliki invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

DOI : https://dx.doi.org/10.24014/jsms.v11i2.28648

Teorema 3 [14] Dimisalkan P adalah suatu matriks persegi, maka:

1. Diasumsikan submatriks A pada P merupakan suatu matriks non *singular*. Maka syarat cukup dan perlu agar P memiliki invers adalah komplemen *schur* dari A memiliki invers dan $(D-CA^{-1}B)$ juga memiliki invers, sehingga diperoleh:
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$
2. Diasumsikan submatriks D pada P merupakan suatu matriks non *singular*. Maka syarat cukup dan perlu agar P memiliki invers adalah komplemen *schur* dari D memiliki invers dan $(A-BD^{-1}C)$ juga memiliki invers, sehingga diperoleh:
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$
3. Diasumsikan submatriks B pada P merupakan suatu matriks non *singular*. Maka syarat cukup dan perlu agar P memiliki invers adalah komplemen *schur* dari B memiliki invers dan $(C-DB^{-1}A)$ juga memiliki invers, sehingga diperoleh:
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1}+B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}.$$
4. Diasumsikan submatriks C pada P merupakan suatu matriks non *singular*. Maka syarat cukup dan perlu agar P memiliki invers adalah komplemen *schur* dari C memiliki invers dan $(B-AC^{-1}D)$ juga memiliki invers, sehingga diperoleh:
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1}+C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & -(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 4 [14] Apabila P adalah suatu matriks persegi, maka:

1. Syarat cukup dan perlu agar $P=\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah B dan C memiliki invers, sehingga $P^{-1}=\begin{bmatrix} C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.
2. Syarat cukup dan perlu agar $P=\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ memiliki invers adalah B dan C memiliki invers, sehingga $P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$.

Pada penelitian ini akan dilakukan beberapa langkah penelitian untuk mendapatkan bentuk umum invers pada matriks $RLPrFrLcirc_r$ yang mana antara lain:

1. Diberikan suatu matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0,\dots,0,a,a)$ dari Persamaan (1) yang berordo 3×3 hingga 8×8 dengan $a\neq 0$.
2. Memblok matriks pada Persamaan (1) yang berordo 3×3 hingga 8×8 mengggunakan aturan matriks blok 2×2 yang memiliki masing-masing submatriks dan dimisalkan dengan A,B,C dan D.
3. Menentukan invers dari submatriks A,B,C dan D yang *invertible* pada Persamaan (1) yang berordo 3×3 hingga 8×8 dengan cara melakukan pengeblokan kembali pada submatriks yang berukuran besar secara berulang sedemikian sehingga menjadi submatriks berukuran 2×2 agar dapat menerapkan komplemen *schur* berdasarkan Teorema 2.3 bagian (iii) dan (iv), dan Teorema 2.4.
4. Menentukan invers dari matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0,\dots,0,a,a)$ dari Persamaan (1) yang berordo 3×3 hingga 8×8 menggunakan matriks blok 2×2 dengan menerapkan komplemen *schur* berdasarkan Teorema 2.3 bagian (i) dan (iii).
5. Menduga bentuk umum invers matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0,\dots,0,a,a)$ yang berordo 3×3 hingga 8×8.

6. Membuktikan bentuk umum invers matriks$RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ dengan menunjukkan bahwa $R_n R_n^{-1} = R_n^{-1} R_n = I$.
7. Menerapkan bentuk umum invers matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ ke dalam contoh soal.

3. Hasil dan Pembahasan

Langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum invers matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ $a \neq 0$ ordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan matriks blok 2×2. Berikut adalah proses dalam memblok Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 3×3 hingga 8×8 menjadi matriks blok 2×2:

1. Memblok Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 3×3

Cara 1:

$$R_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & a & a \\ a & a & 0 \\ \hline a & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Cara 2:

$$R_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a & a \\ a & a & 0 \\ \hline a & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

2. Memblok Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 4×4

Cara 1:

$$R_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Cara 2:

$$R_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

3. Memblok Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 5×5

Cara 1:

$$R_5 = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Cara 2:

$$R_5 = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

4. Memblok Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo $n \times n$

Cara 1:

$$R_n = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Cara 2:

$$R_n = \left[\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ra & ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Berikut adalah proses dalam menentukan invers submatriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo 3×3 hingga 8×8:

1. Invers Submatriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo 3×3

Cara 1:

$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & a \end{bmatrix}$ dan $D = [ra]$

invers matriksnya adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

dan $D^{-1} = \left[\frac{1}{ra}\right]$

Cara 2:

$B = \begin{bmatrix} a & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = [a]$

invers matriksnya adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$C^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

2. Invers Submatriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo 4×4

Cara 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } D = [ra]$$

invers matriksnya adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $D^{-1} = \left[\frac{1}{ra}\right]$

Cara 2:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C = [a]$$

invers matriksnya adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$C^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

3. Invers Submatriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \dots, 0, a, a)$ Ordo 5×5

Cara 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } D = [ra]$$

invers matriksnya adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $D^{-1} = \left[\frac{1}{ra}\right]$

Cara 2:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C = [a]$$

invers matriksnya adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$$

4. Invers Submatriks $RLPrFrLcirc_r\ (0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo $n \times n$

Cara 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dan } D = [ra]$$

invers matriksnya adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $D^{-1} = \left[\frac{1}{ra}\right]$

Cara 2:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dan } C = [a]$$

invers matriksnya adalah

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Berikut adalah proses dalam menentukan invers matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 3×3 hingga 8×8 menjadi matriks Blok 2×2:

1. Invers Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 3×3

$$(R_3)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a}+\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

2. Invers Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 4×4

$$(R_4)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a}+\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

3. Invers Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo 5×5

$$(R_5)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a}+\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

4. Invers Matriks $RLPrFrLcirc_r$ $(0, \ldots, 0, a, a)$ Ordo $n \times n$

$$
(R_n)^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{-r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ genap \end{cases}
$$

Teorema 1. Diberikan R_n Matriks $RLPrFrLcirc_r\ (0, \dots, 0, a, a)$ Ordo $n \times n$ sebagai berikut.

$$
R_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix}, \text{ dengan } a, r \in \mathbb{R}, \text{ dimana } a \neq 0
$$

Maka invers matriks tersebut adalah

$$
(R_n)^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{-r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ genap \end{cases}
$$

Bukti. Berdasarkan Defenisi 2.11 untuk membuktikan Teorema 1 dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $R_n R_n^{-1} = R_n^{-1} R_n = I$.

DOI : https://dx.doi.org/10.24014/jsms.v11i2.28648

1. Untuk ordo $n \times n$ ganjil

Berdasarkan Teorema 1 untuk membuktikan bentuk umum invers R_n^{-1} ordo $n \times n$ dengan n bernilai ganjil dapat menggunakan aturan invers sebagai berikut.
Pembuktian invers kiri $R_n R_n^{-1} = I$:

$$R_n R_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{-r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$R_n R_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dimisialkan g_{ij} adalah entri baris ke-i pada matriks R_n dikali kolom ke-j pada matriks R_n^{-1}, maka dapat dinalisis bahwa:

1. Pada entri g_{11}, untuk baris ke- $i = 1$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-1)$ dan suku ke-n sedangkan untuk kolom ke- $j = 1$ matriks R_n^{-1} memiliki 1 entri bernilai selain $\left(-\frac{r}{a}\right)$ dan $\frac{r}{a}$ yaitu $\left(\frac{-r+1}{a}\right)$ pada suku ke-n. Maka apabila baris ke-1 matriks R_n dan kolom ke-1 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
2. Pada entri g_{22}, untuk baris ke- $i = 2$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-2)$ dan suku ke-$(n-1)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 2$ matriks R_n^{-1} memiliki 2 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-2 matriks R_n dan kolom ke-2 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
3. Pada entri g_{33}, untuk baris ke- $i = 3$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-3)$ dan suku ke-$(n-2)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 3$ matriks R_n^{-1} memiliki 3 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-2)$, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-3 matriks R_n dan kolom ke-3 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
4. Pada entri g_{44}, untuk baris ke- $i = 4$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-4)$ dan suku ke-$(n-3)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 4$ matriks R_n^{-1} memiliki 4 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-3)$, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-$(n-2)$, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-4 matriks R_n dan kolom ke-4 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.

5. Begitu seterusnya hingga untuk entri $g_{(n-1)(n-1)}$, untuk baris baris ke- $i = (n-1)$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-2 dan suku ke-1 sedangkan untuk kolom ke- $j = (n-1)$ matriks R_n^{-1} memiliki $(n-1)$ entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-2, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-3, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-4, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-5 dan begitu seterusnya secara berulang hingga suku ke-n. Maka apabila baris ke-$(n-1)$ matriks R_n dan kolom ke-$(n-1)$ matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
6. Pada entri g_{nn}, untuk baris ke- $i = n$ matriks R_n memiliki 3 entri yang bernilai tak nol yaitu a untuk suku ke-1 dan ra untuk suku ke-$(n-1)$ dan suku ke-n sedangkan untuk kolom ke- $j = n$ matriks R_n^{-1} memiliki n entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-1, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-2, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-3, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-4 dan begitu seterusnya secara berulang hingga suku ke-n. Maka apabila baris ke-n matriks R_n dan kolom ke-n matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
7. Dan untuk entri g_{ij} selain diagonal utama, untuk baris ke- $i \neq j$ matriks R_n dan kolom ke- $i \neq j$ matriks R_n^{-1} akan selalu bernilai 0.

Dengan teknik analisa yang sama, maka untuk pembuktian invers kanan $R_n^{-1}R_n = I$ diperoleh:

$$R_n^{-1}R_n = \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{-r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix}$$

$$R_n^{-1}R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2. Untuk ordo $n \times n$ genap

Berdasarkan Teorema 4.1 untuk membuktikan bentuk umum invers R_n^{-1} ordo $n \times n$ dengan n bernilai genap dapat menggunakan aturan invers sebagai berikut.

Pembuktian invers kiri $R_n R_n^{-1} = I$:

$$R_nR_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian matriksnya adalah

$$R_nR_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dimisialkan g_{ij} adalah entri baris ke-i pada matriks R_n dikali kolom ke-j pada matriks R_n^{-1}, maka dapat dianalisis bahwa:

1. Pada entri g_{11}, untuk baris ke- $i = 1$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-1)$ dan suku ke-n sedangkan untuk kolom ke- $j = 1$ matriks R_n^{-1} memiliki 1 entri bernilai selain $\left(-\frac{r}{a}\right)$ dan $\frac{r}{a}$ yaitu $\left(\frac{r+1}{a}\right)$ pada suku ke-n. Maka apabila baris ke-1 matriks R_n dan kolom ke-1 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
2. Pada entri g_{22}, untuk baris ke- $i = 2$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-2)$ dan suku ke-$(n-1)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 2$ matriks R_n^{-1} memiliki 2 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-2 matriks R_n dan kolom ke-2 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
3. Pada entri g_{33}, untuk baris ke- $i = 3$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-3)$ dan suku ke-$(n-2)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 3$ matriks R_n^{-1} memiliki 3 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-2)$, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-3 matriks R_n dan kolom ke-3 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
4. Pada entri g_{44}, untuk baris ke- $i = 4$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-$(n-4)$ dan suku ke-$(n-3)$ sedangkan untuk kolom ke- $j = 4$ matriks R_n^{-1} memiliki 4 entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-3)$, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-$(n-2)$, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-$(n-1)$ dan $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-n. Maka apabila baris ke-4 matriks R_n dan kolom ke-4 matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
5. Begitu seterusnya hingga untuk entri $g_{(n-1)(n-1)}$, untuk baris baris ke- $i = (n-1)$ matriks R_n memiliki 2 entri yang bernilai tak nol yaitu a pada suku ke-2 dan suku ke-1 sedangkan untuk kolom ke- $j = (n-1)$ matriks R_n^{-1} memiliki $(n-1)$ entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-2, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-3, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-4, $\left(-\frac{1}{a}\right)$

untuk suku ke-5 dan begitu seterusnya secara berulang hingga suku ke-n. Maka apabila baris ke-$(n-1)$ matriks R_n dan kolom ke-$(n-1)$ matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.

6. Pada entri g_{nn}, untuk baris ke- $i=n$ matriks R_n memiliki 3 entri yang bernilai tak nol yaitu a untuk suku ke-1 dan ra untuk suku ke-$(n-1)$ dan suku ke-n sedangkan untuk kolom ke- $j=n$ matriks R_n^{-1} memiliki n entri bernilai tak nol yaitu $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-1, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-2, $\frac{1}{a}$ untuk suku ke-3, $\left(-\frac{1}{a}\right)$ untuk suku ke-4 dan begitu seterusnya secara berulang hingga suku ke-n. Maka apabila baris ke-n matriks R_n dan kolom ke-n matriks R_n^{-1} tersebut dikalikan akan bernilai 1.
7. Dan untuk entri g_{ij} selain diagonal utama, untuk baris ke- $i\neq j$ matriks R_n dan kolom ke- $i\neq j$ matriks R_n^{-1} akan selalu bernilai 0.

Dengan teknik analisa yang sama, maka untuk pembuktian invers kanan $R_n^{-1}R_n=I$ diperoleh:

$$R_n^{-1}R_n=\begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix}$$

$$R_nR_n^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

Dengan teknik analisa yang sama, maka untuk pembuktian invers kanan $R_n^{-1}R_n=I$ diperoleh:

$$R_n^{-1}R_n=\begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & ra & ra \end{bmatrix}$$

$$R_n^{-1}R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijabarkan pada sebelumnya, didapatkan bentuk umum dari invers matriks $RLPrFrLcirc_r\ (0,\dots,0,a,a)$ ordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ pada Persamaan (1) menggunakan matriks blok 2×2 sebagai berikut:

$$(R_n)^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{-r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{r}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{r+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, & n\ genap \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] H. Anton dan C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. 2004.

[2] B. J. Olson, S. W. Shaw, C. Shi, C. Pierre, dan R. G. Parker, "Circulant matrices and their application to vibration analysis," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 66, no. 4, 2014.

[3] Lin Jiang Z, Ben Xu Z, "Efficient Alghorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse of FLS r-Circulant Matrix", *J. Appl. Math & Computing*, vol 18, no. 1-2, hal. 45-47, 2005.

[4] Pan, Xue dan Qin, Mei, "The Discriminance for FLDcircr Matrices and the Fast Alghorithm of Their Invers and Generalized Inverse", vol. 05, hal. 54-61, Shanghai, 2015.

[5] Jiang, Xiaoyu dan Hong, Kicheon, "Exact Determinants of some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds of Famous Numbers", *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysist*, hal. 1-12, 2014.

[6] T. Xu, Z. Jiang, dan Z. Jiang, "Explicit Determinants of the RFPrLrR Circulant and RLPrFrL Circulant Matrices Involving Some Famous Numbers," in *Abstract and Applied Analysis*, 2014, vol. 2014.

[7] R. Rahmawati, N. Fitri, dan A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr $(0, b, \dots, b)$," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, hal. 113–121, 2020.

[8] Z. Hasanah, Y. Muda, F. Aryani, dan C. C. Marzuki, "Determinan Dan Invers Matriks Blok 2×2 Dalam Aplikasi Matriks FLScircr Bentuk Khusus," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11*, 2019.

[9] A. N. Rahma, M. Anggelina, dan R. Rahmawati, "Invers Matriks Blok 2×2Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, hal. 334–344, 2019.

[10] R. Edrian, "Invers Matriks RSLPFLcircfr Bentuk Khusus $(b, 0, \dots, 0, b)$ Berordo $n \times n$ Dengan $n \geq 3$ Menggunakan Matriks Blok 2×2," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[11] H. Fikri, "Invers Matriks RFPLRcircfr Bentuk Khusus $(a, a, \dots, 0, 0)$ Berordo $n \times n$ Dengan $n \geq 3$ Menggunakan Matriks Blok 2×2," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[12] E. Rainarli, M. Si, K. E. Dewi, M.Si, and J. T. Informatika, *Aljabar Linear dan Matriks*. 2011.

[13] A. Yulian, S.L.M Sitio, S.D.Y. Kusuma, and P. Rosyani, *Aljabar Linear dan Matriks*, no. 1. 2019.

[14] Davis, Philip J., *Circulan Matrices: Division of Applied Mathematics Brown University* New York. 1979.

[15] Ilhamsyah, Helmi, dan F. Fran, "Determinan Dan Invers Matriks Blok 2×2," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 6, no. 03.

[16] M. Redivo-Zaglia, "Pseudo-Schur complements and their properties," *Applied numerical mathematics*, vol. 50, no. 3–4, hal. 511–519, 2004.

[17] T.-T. Lu dan S.-H. Shiou, "Inverses of 2×2 block matrices," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 43, no. 1–2, hal. 119–129, 2002.