

Penerapan Model SIR dengan *Nonlinier Incidence Rate* pada Penyebaran Covid-19 di Provinsi Riau

Irma Suryani¹, Fitri Kurniyawati²

^{1,2} Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: irma.suryani@uin-suska.ac.id¹, fitri20kurniyawati@gmail.com²

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai model SIR dengan tingkat insiden nonlinier (*nonlinear incidence rate*) ditambahkan dengan asumsi adanya kematian akibat Covid-19. Penelitian ini dilakukan dengan mendiskritisasi model SIR menggunakan metode Euler dan mensimulasikan model dengan menggunakan Maple. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Riau bulan Agustus–September 2021. Pada penelitian ini ditemukan bahwa model memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Hasil yang diperoleh yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik jika syarat dan kondisi terpenuhi. Berdasarkan data riil diperoleh pula Covid-19 di Provinsi Riau merupakan sebuah endemik penyakit yang penyebarannya akan sulit dikendalikan, namun akan menghilang perlahan secara signifikan.

Kata Kunci: Covid-19, model matematika, model SIR, *nonlinear incidence rate*, titik ekuilibrium

Abstract

This research discusses the SIR model with nonlinear incident rates added with the assumption that there are deaths due to Covid-19. This research was conducted by discretizing the SIR model using the Euler method and simulating the model using Maple. The data used in this research is secondary data obtained from the Riau Provincial Health Office in August–September 2020. In this research it was found that the model has two equilibrium points, namely a disease-free equilibrium point and an endemic equilibrium point. The results obtained are an asymptotically stable disease-free equilibrium point if $R_0 < 1$ and an asymptotically stable disease-endemic equilibrium point if the terms and conditions are met. Based on real data, Covid-19 in Riau Province is an endemic disease whose spread will be difficult to control, but will slowly and significantly disappear.

Keywords: Covid-19, equilibrium points, mathematical model, *nonlinear incidence rate*, SIR model

1. Pendahuluan

Covid-19 (*Coronavirus Disease 2019*) merupakan jenis penyakit baru yang belum pernah diketahui pada manusia. Virus penyebab Covid-19 adalah SARS-CoV-2, yang dikategorikan sebagai virus zoonosis (penularan dari hewan ke manusia). *Coronavirus* adalah keluarga besar virus yang mengakibatkan penyakit bergejala ringan sampai bergejala berat yang menyebabkan kematian. Gejala umum dari Covid-19 yaitu gangguan pernapasan akut seperti sesak napas, batuk, dan demam [1]. Kasus pertama Covid-19 di Indonesia pada tanggal 2 Maret 2020 sebanyak dua kasus dikonfirmasi [2]. Munculnya wabah Covid-19 yang telah melanda dunia menjadi perhatian berbagai pihak karena cepatnya tingkat penyebaran dan banyaknya kasus kematian yang terjadi. Hal ini terjadi dikarenakan waktu kemunculan Covid-19 yang terlalu tiba-tiba, hingga vaksin dan upaya pencegahan belum dipersiapkan.

Upaya pencegahan penyebaran penyakit menular salah satunya dengan mempelajari sifat dinamis penyebaran penyakit tersebut dengan pemodelan matematika [3]. Banyak peneliti mengusulkan model matematika untuk menggambarkan perilaku Covid-19, salah satunya oleh penelitian [4], yang mengusulkan metode baru untuk menggambarkan perilaku Covid-19 yaitu model SIR dengan metode *Nonlinear Incidence Rate*. Dalam penelitiannya, ditemukan bahwa intervensi dari pemerintah seperti kebijakan atau *social distancing* dapat membuat penyakit ini berkurang lebih cepat. Penelitian tentang model penyebaran Covid-19 juga dilakukan oleh [5], dimana penelitiannya mengkaji model SIR di suatu populasi tertutup dan diperoleh hasil bahwa aktivitas sosial yang terbatas dapat menurunkan kasus infeksi Covid-19. Selanjutnya oleh [6], digunakan model SIR untuk mengukur laju penyebaran Covid-19 yang menunjukkan terdapat laju penurunan kasus terinfeksi dan diprediksi akan berakhir di bulan Juni 2020. Namun, prediksi tersebut tidak sesuai dengan kenyataan dikarenakan kurang tepatnya asumsi dan data yang digunakan dalam penelitian tersebut.

Dari beberapa penelitian di atas terdapat kesamaan hasil penelitian, yaitu adanya laju penurunan kasus Covid-19 akibat dari penerapan pembatasan sosial masyarakat. Penulis tertarik untuk mengulas jurnal [4] dengan menambahkan asumsi adanya kematian karena penyakit Covid-19. Dengan demikian, penulis mengambil judul "**Penerapan Model SIR dengan *Nonlinear Incidence Rate* pada Penyebaran Covid-19 di Provinsi Riau**".

2. Metode Penelitian

1. Mempelajari model SIR penyebaran Covid-19 pada jurnal Fayeldi dan Dinnullah [4] yaitu:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \alpha - \mu S - \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI - (\mu + \vartheta)I, \\ \dot{R} &= \vartheta I - \mu R,\end{aligned}\tag{1}$$

dengan

- $S(t)$: jumlah individu rentan pada saat t ,
- $I(t)$: jumlah individu terinfeksi pada saat t ,
- $R(t)$: jumlah individu yang sembuh pada saat t ,

- N : jumlah individu dalam populasi,
 $\frac{1}{1+\gamma I^2}$: faktor penghambat (PSBB, *social distancing*, vaksinasi, penggunaan masker),
 α : tingkat kelahiran,
 β : tingkat penularan Covid-19,
 ϑ : tingkat kesembuhan individu terinfeksi, dan
 μ : tingkat kematian.

2. Membentuk model SIR dengan *Nonlinear Incidence Rate* pada jurnal Fayeldi dan Dinnullah [4] dengan menambahkan asumsi adanya kematian karena penyakit Covid-19 (b) yaitu:

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \alpha - \mu S - \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI, \\
 \dot{I} &= \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI - (\mu + \vartheta + b)I, \\
 \dot{R} &= \vartheta I - \mu R,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

3. Mencari titik ekuilibrium dan kestabilan model pada langkah (2).
 4. Melakukan simulasi dan analisis model dengan menggunakan aplikasi *Maple*.

3. Hasil dan Pembahasan

a. Model Matematika Covid-19

Model matematika adalah gambaran suatu sistem dengan menggunakan konsep dan bahasa matematika yang biasanya digunakan sebagai alat untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit menular. Model matematika dalam penelitian ini adalah model SIR dengan *nonlinier incidence rate*. Diperlukan beberapa asumsi yang sesuai yang akan diteliti. Adapun asumsi-asumsi tersebut adalah:

1. Populasi (N) terdiri dari tiga kompartemen, yaitu jumlah individu yang rentan (S), jumlah individu terinfeksi (I), dan jumlah individu yang sembuh (R).
2. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi.
3. Laju kelahiran, kematian, dan imigrasi diabaikan sehingga populasi konstan (tertutup). Artinya $N = S(t)+I(t)+R(t)$, jumlah populasi dalam waktu t sama dengan jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh.
4. Terjadi kematian karena infeksi virus pada populasi yang terinfeksi Covid-19.
5. Populasi telah divaksinasi dan memiliki faktor penghambat seperti penggunaan masker dan *social distancing*. Faktor penghambat tersebut sebagai laju insidensi penyebaran nonlinier, yaitu $\frac{1}{1+\gamma I^2}$.

Adapun variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model SIR penyebaran Covid-19 pada penelitian ini adalah:

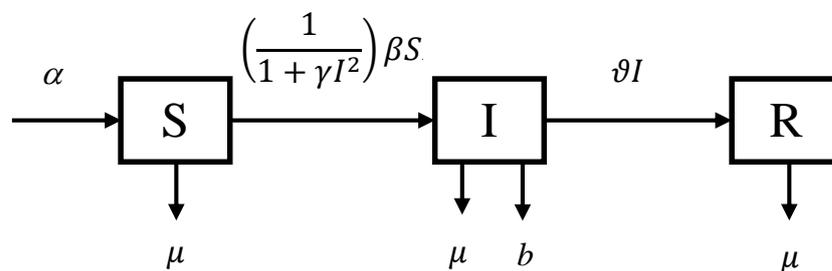
Variabel

- $S(t)$: Jumlah individu rentan pada saat t ,
 $I(t)$: Jumlah individu terinfeksi pada saat t ,
 $R(t)$: Jumlah individu yang sembuh pada saat t ,
 N : Jumlah individu dalam populasi.

Parameter

- γ : Faktor penghambat (PSBB, *social distancing*, vaksinasi, penggunaan masker),
- α : Tingkat kelahiran,
- μ : Tingkat kematian,
- β : Tingkat penularan Covid-19,
- ϑ : Tingkat kesembuhan individu terinfeksi,
- b : Tingkat kematian akibat Covid-19.

Berdasarkan asumsi, variabel, dan parameter di atas, maka dapat dibentuk model SIR penyebaran Covid-19 dengan *nonlinier incidence rate* seperti Persamaan (2), dengan $S(t) + I(t) + R(t) = \text{konstan} = N$. Adapun bentuk model di atas menjadi diagram berikut:



Gambar 1 Diagram Transfer Covid-19 dengan Nonlinier Incidence Rate

b. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium juga merupakan penyelesaian sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak berubah terhadap waktu. Syarat untuk mencapai titik ekuilibrium dapat terjadi saat sistem persamaan disubstitusikan titik ekuilibrium maka fungsi tersebut akan bernilai nol, sedemikian sehingga mengakibatkan turunan pertama fungsi tersebut sama dengan nol. Sebagaimana didefinisikan titik ekuilibrium sebagai berikut:

Definisi 1 [7] Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(\bar{x})$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

Adapun titik ekuilibrium dari Sistem Persamaan (3) diperoleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan dengan nol, atau $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = 0$ dan $\dot{I} = \frac{dI}{dt} = 0$. Persamaan ketiga dari Sistem Persamaan (3) atau kompartemen R tidak muncul pada persamaan pertama dan kedua, karena R tidak mempengaruhi laju perubahan individu pada kompartemen S dan I .

Terdapat dua titik ekuilibrium pada Sistem Persamaan (3) yang ditentukan dalam dua kondisi, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh $E_0 = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0\right)$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $E_1 = \left(\frac{(\mu+\vartheta+b)(1+\gamma I^2)}{\beta}, \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\mu^2\gamma(1-R_0)}}{2\mu\gamma}\right)$ dengan $R_0 = \frac{\alpha\beta}{(\mu+\vartheta+b)}$.

c. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium pada sistem persamaan SIR diskrit dilakukan linearisasi dengan matriks Jacobian. Sehingga diperoleh matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (3), yaitu:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \mu h - \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} hI & -\frac{\beta}{1 + \gamma I^2} hS \\ \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} hI & 1 + \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} hS - (\mu + \vartheta + b)h \end{pmatrix} \quad (3)$$

Teorema 1. Jika $R_0 < 1$ dan $h < \min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{(\mu + \vartheta + b) - \frac{\alpha\beta}{\mu(1 + \gamma I^2)}}\right)$, maka titik ekuilibrium

bebas penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Dengan menstubsitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0\right)$ ke matriks Jacobian (4), sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya, yaitu:

$$\left[1 - \mu h - \lambda\right] \left[1 + h \left(\frac{\alpha\beta}{\mu(1 + \gamma I^2)} - (\mu + \vartheta + b)\right) - \lambda\right] = 0,$$

maka

$$\lambda_1 = 1 - \mu h \text{ atau } \lambda_2 = 1 + h \left(\frac{\alpha\beta}{\mu(1 + \gamma I^2)} - (\mu + \vartheta + b)\right).$$

Nilai $|\lambda_1| < 1$ diperoleh jika $h < \frac{2}{\mu}$, dan nilai $|\lambda_2| < 1$ diperoleh jika $h < \frac{2}{(\mu + \vartheta + b) - \frac{\alpha\beta}{\mu(1 + \gamma I^2)}}$.

Jadi, terbukti bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit adalah stabil asimtotik. ■

Teorema 4.2 Titik ekuilibrium endemik penyakit $E_1 = \left(\frac{(\mu + \vartheta + b)(1 + \gamma I^{*2})}{\beta}, \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\mu^2\gamma(1 - R_0)}}{2\mu\gamma}\right)$ stabil asimtotik jika $|\lambda_{1,2}| < 1$ dan $R_0 > 1$.

Bukti:

Dengan menstubsitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 ke matriks Jacobian (4), sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya, yaitu:

$$\lambda^2 - \left(2 - \mu h - \frac{\beta}{1 + \gamma I^{*2}} hI^*\right) \lambda + 1 - \mu h - \frac{\beta}{1 + \gamma I^{*2}} hI^*(1 + (\mu + \vartheta + b)h) = 0,$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0, \quad (4)$$

dimana $A = 2\mu h - \frac{\beta}{1 + \gamma I^{*2}} hI^*$ dan $B = 1 - \mu h - \frac{\beta}{1 + \gamma I^{*2}} hI^*(1 + (\mu + \vartheta + b)h)$, maka Persamaan (4.22) memiliki akar-akar karakteristik yang memenuhi Lemma 4.1 berikut:

Lemma 4.1 [8] Persamaan kuadrat $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_{1,2}| < 1$ jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

- i) $1 + A + B > 0$,
- ii) $1 - B > 0$,
- iii) $1 - A + B > 0$.

Dari analisis kestabilan titik ekuilibrium E_1 diperoleh tiga kondisi sebagai berikut:

i) $1 + A + B > 0$ terpenuhi dengan tiga kemungkinan, yaitu

a. $h > 0$ dan $\frac{1}{4}\left(\mu + \frac{\beta}{1+\gamma I^{*2}} I^*\right)^2 < \frac{\beta(\mu+\vartheta+b)}{1+\gamma I^{*2}} I^*$,

b. $h = 0$ dan $\frac{1}{4}\left(\mu + \frac{\beta}{1+\gamma I^{*2}} I^*\right)^2 = \frac{\beta(\mu+\vartheta+b)}{1+\gamma I^{*2}} I^*$,

c. $0 < h < h_1$ atau $h > h_2$ dan $\frac{1}{4}\left(\mu + \frac{\beta}{1+\gamma I^{*2}} I^*\right)^2 > \frac{\beta(\mu+\vartheta+b)}{1+\gamma I^{*2}} I^*$.

ii) $1 - B > 0$ terpenuhi.

iii) $1 - A + B > 0$ terpenuhi.

3.1 Simulasi

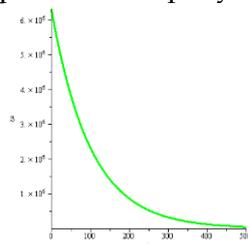
Disini, simulasi akan dilakukan dengan 2 kondisi yaitu $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Nilai parameter yang digunakan berdasarkan data riil yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Riau dan Jurnal Fayeldi [4] seperti terlihat pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1 Nilai Parameter pada Model Penyakit Covid-19

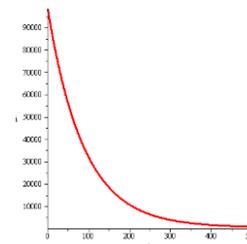
Parameter	Nilai Parameter
α	0,1
μ	0,1
β	0,5
γ	0,5
ϑ	0,005960847
b	0,007402275
h	0,1

Sumber: Dinas Kesehatan Provinsi Riau (Agustus-September 2021)

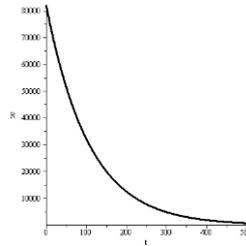
Diketahui, bulan Agustus – Spetember 2021 merupakan bulan naik nya penderita Covid-19 di Pekanbaru sehingga Penulis mengambil data pada bulan Agustus-September 2021. Lebih lanjut, berdasarkan data sensus penduduk dari Badan Pusat Statistik (BPS) tahun 2021, nilai awal: $S(0) = 6.313.295$, $I(0) = 98.310$, dan $R(0) = 81.998$. Sehingga dinamika populasi bebas penyakit dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini:



a) Grafik $S(t)$



b) Grafik $I(t)$

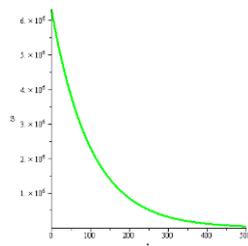


c) Grafik $R(t)$

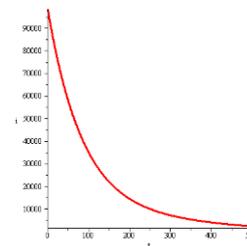
Gambar 2 Simulasi 1 Covid-19 di Provinsi Riau dengan $\beta=0,5$

Berdasarkan Gambar 2 di atas dapat disimpulkan bahwa populasi di setiap kompartemen (S , I , dan R) menurun terhadap waktu t . Diperlihatkan grafik solusi nilai awal $(S_0, I_0) = (6313295, 98310)$ terhadap $h = 0,1$ konvergen menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit $(1,0)$. Hal ini berarti, bahwa populasi S akan menurun secara drastis menuju nol pada hari ke-500, karena cepatnya penularan virus Covid-19. Populasi I akan menurun secara signifikan menuju nol pada hari ke-450 dan stabil, akibat adanya faktor penghambat (γ), bertambahnya orang meninggal akibat Covid-19 (b) dan laju kesembuhan (ϑ). Sehingga R juga terjadi penurunan signifikan menuju nol pada hari ke-500 yang dikarenakan oleh laju kesembuhan pada populasi yang terinfeksi (ϑ) dan laju kematian alami. Diketahui parameter di atas $R_0 < 1$, maka penyebaran Covid-19 akan menghilang seiringnya waktu.

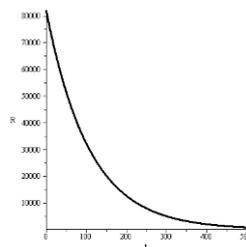
Sedangkan diketahui berdasarkan data riil Covid-19 di Provinsi Riau diperoleh $\beta = 4,30869$ sehingga diperoleh $R_0 = 3,80079 > 1$. Sehingga, nyatanya penyebaran Covid-19 meningkat bahkan akan sampai sulit dikendalikan. Hal ini berarti penyebaran Covid-19 di Provinsi Riau dapat diartikan sebagai sebuah endemik penyakit. Namun berdasarkan Gambar 3 di bawah ini, terlihat bahwa populasi S , I , dan R terjadi penurunan yang signifikan dan menuju titik nol dan stabil pada hari ke-500. Berdasarkan grafik pada Gambar 3 dapat disimpulkan bahwa Covid-19 sebagai endemik penyakit dimulai pada hari ke-500 Covid-19 akan hilang atau tidak ada.



a) Grafik $S(t)$



b) Grafik $I(t)$



c) Grafik $R(t)$

Gambar 3 Simulasi 2 Covid-19 di Provinsi Riau dengan $\beta=4,30869$

4. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Model epidemik SIR dengan *nonlinear incidence rate* berdasarkan [5], ditambahkan asumsi adanya kematian karena penyakit Covid-19 (b):

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \alpha - \mu S - \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{1 + \gamma I^2} SI - (\mu + \vartheta + b)I, \\ \dot{R} &= \vartheta I - \mu R. \end{aligned} \tag{5}$$

Diketahui S , I , dan R masing-masing merupakan populasi rentan, terinfeksi, dan pulih. Parameter α merepresentasikan angka kelahiran, β merepresentasikan tingkat penularan *Coronavirus*, γ merepresentasikan efek penghambatan seperti upaya pemerintah untuk pencegahan penyebaran penyakit Covid-19, μ merepresentasikan tingkat kematian, dan ϑ merepresentasikan tingkat pemulihan.

2. Persamaan Model SIR (5.1) di atas memiliki dua titik ekuilibrium yaitu bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0\right)$ dan endemik penyakit $E_1 = \left(\frac{(\mu + \vartheta + b)(1 + \gamma I^{*2})}{\beta}, \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\mu^2\gamma(1 - R_0)}}{2\mu\gamma}\right)$ dengan $R_0 = \frac{\alpha\beta}{(\mu + \vartheta + b)}$. Dimana titik ekuilibrium model SIR diskrit sama dengan titik ekuilibrium model SIR kontinu. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik karena $R_0 < 1$ dan kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit juga stabil asimtotik karena $|\lambda_{1,2}| < 1$ dan $R_0 > 1$.
3. Hasil simulasi model penyebaran Covid-19 berdasarkan [4] dengan simulasi Model SIR (5) adalah terdapat perbedaan bentuk grafik, karena perbedaan sumber data. Namun, dari grafik-grafik tersebut memiliki kondisi yang sama. Dimana penyakit Covid-19 sebagai endemik penyakit (karena berdasarkan data riil Covid-19 di Provinsi Riau diperoleh $\beta = 4,30869$, sehingga $R_0 = 3,80079 > 1$) dimulai pada hari ke-500 Covid-19 akan menghilang atau tidak ada secara signifikan.

Daftar Pustaka

- [1] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia dan Direktorat Jenderal Pencegahan dan Pengendalian Penyakit, *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Coronavirus Disease (COVID-19)*. 2020. [Daring]. Tersedia pada: https://infeksiemerging.kemkes.go.id/download/REV-04_Pedoman_P2_COVID-19_27_Maret2020_TTD1.pdf [Diakses 11 Juni 2021].
- [2] "WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 – 11 March 2020," 2020. <https://www.who.int/dg/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020> (diakses 22 April 2021).
- [3] S. Agustianingsih, R. Reorita, dan R. Renny, "Kontrol Optimal pada Model SIR dengan Pengaruh Vaksinasi, Karantina, dan Faktor Imigrasi," *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 16, no. 3, hal. 311–324, 2020, doi: 10.20956/jmsk.v16i3.6942.
- [4] T. Fayeldi dan R. N. I. Dinnullah, "Covid-19 sir model with nonlinear incidence

- rate," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1869, no. 1, hal. 1–5, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1869/1/012113.
- [5] A. F. Huda, E. R. Wulan, F. Ilahi, dan M. S. Khumaeroh, "Analisis Pengaruh Social Distancing pada Transmisi Covid-19 dengan Menggunakan Model SIR," *UIN Sunan Gunung Djati Bandung*, vol. 19, 2020.
- [6] R. T. Handayanto dan H. Herlawati, "Efektifitas Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) di Kota Bekasi Dalam Mengatasi COVID-19 dengan Model Susceptible-Infected-Recovered (SIR)," *Jurnal Kajian Ilmiah*, vol. 20, no. 2, hal. 119–124, Mei 2020, doi: 10.31599/jki.v20i2.119.
- [7] S. P. Hastings, "Differential Equations and Dynamical Systems (Lawrence Perko)," *SIAM Review*, vol. 34, no. 1, hal. 129–131, Mar 1992, doi: 10.1137/1034019.
- [8] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Third. New York: Springer, 2003.
- [9] F. Sinuhaji, "Model Epidemi SIRS dengan Time Delay pada Infected (Terinfeksi Penyakit)," *Visipena Journal*, vol. 4, no. 1, hal. 24–32, 2020.
- [10] J. K. Hale dan H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [11] M. Soleh dan R. Sriningsih, "Eksistensi dan Kestabilan Titik Equilibrium Model SIR dengan Nonlinear Incidence Rate," *Jurnal Matematika*, vol. 1, hal. 45–52, 2012.
- [12] R. T. Putra, Sukatik, dan S. Nita, "Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Laju Insidensi," *Jurnal Ilmiah Poli Rekayasa*, vol. 10, no. 2, hal. 74–82, 2015, doi: 10.30630/jipr.10.2.77.
- [13] Y. Yulida dan M. A. Karim, "Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 di Provinsi Kalimantan Selatan," *Media Bina Ilmiah*, vol. 14, no. 10, hal. 3257–3264, 2020.
- [14] Tim Kerja Kementerian Dalam Negeri, *Pedoman Umum Menghadapi Pandemi Covid-19 Bagi Pemerintah Daerah: Pencegahan, Pengendalian, Diagnosis dan Manajemen*, vol. 53, no. 9. 2013. doi: 10.1017/CBO9781107415324.004.
- [15] W. B. Fischer, G. Thiel, dan R. H. A. Fink, *Viral Membrane Proteins: Structure, Function, and Drug Design*. New York: Plenum Publisher, 2005. doi: 10.1007/S00249-009-0525-Y.
- [16] Widowati dan Sutimin, *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro, 2007.
- [17] R. Beckley, C. Weatherspoon, M. Alexander, M. Chandler, A. Johnson, dan G. S. Bhatt, "Modeling Epidemics with Differential Equations," hal. 1–9, 2013.
- [18] I. Suryani dan F. Ariad, "Analisis Kestabilan Model Seirs Pada Penyebaran Penyakit Flu Singapura (Hand, Food, and Mouth Disease) dengan Saturated Incidence Rate," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, hal. 63–73, 2018.
- [19] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. New Zealand: Wiley Blackwell, 2016. doi: 10.1002/9781119121534.
- [20] I. Suryani dan M. Y. E, "Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Saturated Incidence Rate," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, 2016.
- [21] R. Naresh, A. Tripathi, J. M. Tchuente, dan D. Sharma, "Stability Analysis of A Time Delayed SIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 2, hal. 348–359, 2009, doi: 10.1016/j.camwa.2009.03.110.
- [22] W. Liu, S. A. Levin, dan Y. Iwasa, "Influence of Nonlinear Incidence Rates Upon

- The Behavior of SIRS Epidemiological Models," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 23, no. 2, hal. 187–204, 1986, doi: 10.1007/BF00276956.
- [23] W. R. Derrick dan P. van den Driessche, "A Disease Transmission Model in A Nonconstant Population," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 31, hal. 837–848, 1993, doi: 10.4249/scholarpedia.2877.
- [24] V. Capasso dan G. Serio, "A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model," *Mathematical Biosciences*, vol. 42, no. 1–2, hal. 43–61, 1978, doi: 10.1016/0025-5564(78)90006-8.
- [25] Z. Hu, W. Ma, dan S. Ruan, "Analysis of SIR Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rate and Treatment," *Mathematical Biosciences*, vol. 238, no. 1, hal. 12–20, 2012.