Jurnal Sains Matematika dan Statistika
p-ISSN: 2460-4542
e-ISSN: 2615-8663

Determinan Matriks $\mathbf{RFP}r\mathbf{L}r\mathbf{Rcirc}_r\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ Ordo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3})$ Menggunakan Metode Salihu

Ade Novia Rahma[1], Tiara Fitri[2], Rahmawati[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id@[1] , tiarafitr@gmail.com[2], rahmawati@uin-suska.ac.id[3]
Korespondensi penulis : adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id@

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ ordo $n \times n\ (n \geq 3)$ meggunakan metode Salihu. Langkah pertama menentukan determinan interior dan determinan unik kemudian menduga bentuk umum determinan interior dan determinan unik serta dibuktikan dengan induksi matematika. Langkah selanjutnya dengan menggunakan determinan interior dan determinan unik diperoleh bentuk umum determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ ordo $n \times n\ (n \geq 3)$ yaitu $|A_n| = a^n, n \geq 3$ dan diaplikasikan dalam bentuk soal.

Kata Kunci: Determinan, Induksi Matematika, Matriks, Metode Salihu.

Abstract

This study aims to obtain the general form of the determinant matrix RFPrLrRcirc_r (a,a,0,…,0) order n×n (n≥3) using the Salihu method. The first step is to determine the interior determinants and unique determinants, then to estimate the general form of the interior determinants and unique determinants and prove them by mathematical induction. The next step is to use the interior determinants and unique determinants to obtain the general form of the determinant matrix RFPrLrRcirc_r (a,a,0,…,0) of order n×n (n≥3), namely ∣A_n ∣=a^n,n≥3 and applied in question form.

Keywords: *Determinants, Mathematical Induction, Matrix, Salihu Method.*

1. Pendahuluan

Matriks $RFPrLrRcirc_r$ merupakan salah satu dari jenis matrik *circulant*. Beberapa jenis matriks *circulant* yang dikenal yaitu matriks $FLDcirc_r$, matriks $FLScirc_r$, matriks $RFMLRcirc_r$ (*Row First-Minus-Last Right Circulant*), matriks $RLMFLcirc_r$ (*Row Last-Minus-First Left Circulant*), matriks $RSFPLRcirc_r$ (*Row Skew First-Plus-Last Right Circulant*), matriks $RFPrLRcirc_r$ (*Row First-Plus-rLast Right Circulant*), dan matriks $RLPrFLcirc_r$ (*Row Last-Plus-rFirst Left Circulant*) [1],[2],[3],[4],[5].

Pembahasan pada matriks yang sering dibahas adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya.

Beberapa metode determinan yang biasa digunakan yaitu Metode Sarrus, Operasi Baris Elementer (OBE), aturan segitiga, ekspansi kofaktor, aturan Cramer, dan reduksi baris. Selain metode di atas, terdapat beberapa metode lainnya, yaitu metode kondensasi Chio, kondensasi Dodgson, dan gabungan dari keduanya yang disebut metode Salihu [6].

Armend Salihu adalah seorang matematikawan yang memperkenalkan sebuah metode penyelesaian permasalahan determinan matriks $n \times n, (n \geq 3)$ yang dipublikasi dalam artikelnya pada tahun 2012, metode ini disebut dengan metode Salihu yang merupakan gabungan dari metode Chio dan Dodgson, metode ini memiliki determinan interior dengan ordo $(n-2) \times (n-2)$ dan determinan unik dengan ordo $(n-1) \times (n-1)$. Metode tersebut ditulis kembali dalam penelitian [7] pada tahun 2014 dengan judul "Menghitung Determinan Matriks $n \times n (n \geq 3)$ dengan Menggunakan Metode Salihu" dengan kesimpulan bahwa metode Salihu menghasilkan langkah baru yang lebih mudah dipahami dalam menyelesaikan determinan matriks ordo $n \times n, (n \geq 3)$. Metode Salihu juga dipakai dalam penelitian [6] untuk menentukan determinan dari matriks $FLScirc_r$ Bentuk Khusus $n \times n (n \geq 3)$. Dan dalam penelitian [8] juga membahas deteriman matriks $FLScirc_r$ Bentuk Khusus $n \times n (n \geq 3)$ namun menggunakan ekspansi kofaktor.

Selain beberapa penelitian tentang matriks *circulant* di atas, terdapat juga matriks *circulant* lain yaitu matriks $RFPrLrRcirc_r$(*Row First-Plus-rLast r-Right Circulant*) dalam penelitian [5] dengan bentuk umum berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 + ra_{n-1} & \cdots & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} + ra_{n-2} & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra_1 & ra_2 + ra_1 & \cdots & a_0 + ra_{n-1} \end{bmatrix}$$

ditulis $A = RFPrLrRcirc_r(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Berdasarkan beberapa kajian terdahulu yang telah disebutkan di atas, penulis tertarik menghitung determinan matriks *circulant* jenis lain yaitu matriks $RFPrLrRcirc_r$ bentuk khusus berikut menggunakan metode Salihu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a \\ ra & ra & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall\, a \neq 0, a, r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ditulis $A_n = RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$.

2. Metode Penelitian

Metode pada penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan referensi seperti buku referensi, jurnal dan internet. Langkah-langkah pada penelitian ini diuraikan sebagai berikut :

1. Diberikan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ orde 3×3 sampai dengan 10×10.
2. Menentukan determinan interior dan determinan unik matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ mulai dari ordo 3×3 sampai dengan 10×10 untuk mendapatkan nilai determinan yang sesuai dengan penerapan Metode Salihu.
3. ordo yaitu dimulai dari 3×3 sampai dengan 10×10 dengan Metode Salihu.
4. Menduga bentuk umum determinan interior dan determinan unik Metode Salihu berdasarkan pola determinan pada matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ untuk ordo $n \times n (n \geq 3)$.
5. Membuktikan bentuk umum determinan interior dan determinan unik pada matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$untuk ordo $n \times n$ $(n \geq 3)$ menggunakan induksi matematika.
6. Pembuktian bentuk umum determinan matriks khusus $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ sesuai penerapan Metode Salihu sesuai Persamaan (2).

Adapun teori pendukung yang penulis gunakan adalah sebagai berikut :

a. Pengertian Matriks

Himpunan bilangan yang disusun pada aturan baris dan kolom sehingga membentuk baris dan kolom yang saling tegak lurus disebut matriks [9]. Secara umum notasi untuk sebuah matriks menggunakan huruf kapital (misal $A, B, C, \dots$) sedangkan notasi entri sebuah matriks menggunakan huruf kecil (misal $a, b, c, \dots$). Sebagai contoh dapat dilihat pada matriks $m \times n$ dibawah ini [10]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

b. Matriks *Circulant*

Matriks *circulant* merupakan suatu matriks $n \times n$ yang dibentuk dari n vektor dan hanya mempunyai satu input di baris pertama (hanya baris pertama yang diketahui) [11].. Tiap entri pada baris sebelumnya berpindah satu posisi ke kanan, sehingga baris dan entri berikutnya sama di sepanjang diagonal matriks. Matriks *circulant* biasanya dipakai dalam penyelesaian persamaan polinomial. Untuk setiap $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in C$, Matriks *circulant* $(A_{i,j})_{n \times n}$ yang dinotasikan dengan $Circ(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ dapat dituliskan sebagai berikut [12]:

$$(A_{i,j})_{n\times n} = A = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

c. Matriks $RFPrLrRcirc_r$

Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks *circulant* $RFPrLrRcirc_r$ dengan baris pertama $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, dilambangkan dengan $RFPrLrRcirc_r(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ mempunyai bentuk umum matriks sebagai berikut [5]:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 + ra_{n-1} & \cdots & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} + ra_{n-2} & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra_1 & ra_2 + ra_1 & \cdots & a_0 + ra_{n-1} \end{bmatrix}$$

yang dapat dituliskan dengan $A = RFPrLrRcirc_r(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Entri-entri dalam matriks $RFPrLrRcirc_r$ ditentukan berdasarkan baris pertama yang telah diketahui. Selanjutnya untuk entri pertama pada baris ke-$(i + 1)$ diperoleh dengan cara mengalikan r dengan a_{n-k}. Entri kedua dari baris ke-$(i + 1)$ diperoleh dengan menjumlahkan entri pertama baris ke-i dan entri pertama pada baris ke-$(i + 1)$, lalu untuk entri berikutnya dilakukan pengulangan secara siklis. Dilakukan langkah yang sama untuk menentukan entri pada baris berikutnya.

d. Determinan Matriks

Determinan adalah fungsi khusus yang menghubungkan bilangan real dengan suatu matriks persegi [13]. Berikut hal-hal penting yang berhubungan dengan determinan:

Definisi 1. [14]Misal A matriks persegi. Fungsi dari determinan dilambangkan sebagai *det*, definisikan $\det(A)$ sebagai keseluruhan hasil kali elementer dari A. $\det(A)$ disebut juga determinan dari A.

Teorema 1. [14] Misal A adalah matriks persegi,

a. Jika A mempunyai baris atau kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.
b. $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema 2. [14] Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ maka $\det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut; yaitu $\det(A) = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Teorema 3.[14] Apabila A merupakan matriks persegi dengan dua baris atau kolom yang proporsional, maka berlaku $\det(A) = 0$.

Teorema 4. [14] Jika A dan B merupakan matriks persegi dengan ordo sama, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

e. Metode Salihu

Metode Salihu pertama dikenalkan oleh Armend Salihu. Metode ini merupakan gabungan dari metode Dodgson dan Chio. Berikut ini adalah hal-hal penting dalam metode Salihu.

i. Determinan Interior

Determinan interior merupakan suatu determinan dengan ordo $(n-2) \times (n-2)$ dari suatu matriks berordo $n \times n (n \geq 3)$ yang didapat dengan menyingkirkan baris pertama, lalu kolom pertama, baris terakhir, dan kolom terakhir.

Misalkan A adalah matriks berordo 5×5 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Maka determinan interiornya

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ii. Determinan Unik

Determinan unik merupakan determinan dengan ordo $(n-1) \times (n-1)$ dari suatu matriks berordo $n \times n (n \geq 3)$. Dalam penerapan metode Salihu, terdapat empat determinan unik, yaitu $|C|, |D|, |E|$,dan $|F|$ yang didapatkan dengan menyingkirkan baris terakhir dengan kolom terakhir, baris terakhir dengan kolom pertama, baris pertama dengan kolom terakhir, dan baris pertama dengan kolom pertama.

Misalkan A adalah matriks ber 5×5 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Maka determinan uniknya adalah

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$|E| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Bentuk umum metode Salihu dalam menghitung determinan dari matriks ordo $n \times n (n \geq 3)$ adalah sebagai berikut:
Diberikan matriks

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$|A_n| = \frac{1}{|B_{n-2}|} \cdot \begin{vmatrix} |C_{n-1}| & |D_{n-1}| \\ |E_{n-1}| & |F_{n-1}| \end{vmatrix}, |B_{n-2}| \neq 0. \tag{2}$$

Dengan $|B_{n-2}|$ merupakan determinan interior ordo $(n-2) \times (n-2)$ sedangkan $|C_{n-1}|, |D_{n-1}|, |E_{n-1}|$,dan $|F_{n-1}|$ merupakan determinan unik ordo $(n-1) \times (n-1)$.

f. Induksi Matematika

Induksi Matematika merupakan sebuah argumen deduktif dalam pembuktian pernyataan benar atau salah dalam suatu himpunan bilangan bulat terkhusus bilangan asli. Prinsip induksi sederhana [15]:
Misalkan $p(n)$ proposisi untuk bilangan bulat positif, akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar bagi setiap bilangan bulat positif n. Untuk pembuktiannya, ditunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar,
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat postif n.

Langah 1 disebut sebagai basis induksi,untuk langkah ke-2 disebut dengan langkah induksi. Pada langkah kedua melibatkan asumsi (dugaan) bahwa $p(n)$ benar. Asumsi ini disebut hipotesis induksi.
Apabila langkah di atas benar, dengan itu $p(n)$ benar bagi setiap bilangan bulat positif n [15].

3. Hasil dan Pembahasan

Diberikan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ sesuai Persamaan (1) dengan ordo 3×3 sampai 10×10. Untuk menentukan bentuk umum determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ ordo $n \times n (n \geq 3)$ menggunakan metode Salihu, terlebih dahulu akan ditentukan bentuk umum determinan interior serta determinan uniknya. Berikut determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \dots, 0)$ menggunakan metode Salihu berdasarkan Persamaan (2):

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ ra & ra & a \end{bmatrix}$$

$$|B_{3-2}| = a \tag{3}$$

$$|C_{3-1}| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 - 0 = a^2$$

$$|D_{3-1}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - 0 = a^2$$

$$|E_{3-1}| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ ra & ra \end{vmatrix} = 0 - ra^2 = -ra^2$$

$$|F_{3-1}| = \begin{vmatrix} a & a \\ ra & a \end{vmatrix} = a^2 - ra^2$$

Maka, $\det(A_3) = \frac{1}{|B_{3-2}|} \cdot \begin{vmatrix} |C_{3-1}| & |D_{3-1}| \\ |E_{3-1}| & |F_{3-1}| \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 \\ -ra^2 & a^2 - ra^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^4 - ra^4 + ra^4}{a} = \frac{a^4}{a} = a^3$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \\ ra & ra & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$|B_{4-2}| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

$$|C_{4-1}| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = a^3$$

$$|D_{4-1}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = a^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = a^3$$

$$|E_{4-1}| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ ra & ra & 0 \end{vmatrix} = 0 + ra^3 + 0 - 0 - 0 - 0 = ra^3$$

$$|F_{4-1}| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ ra & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 + ra^3 + 0 - 0 - 0 - 0 = a^3 + ra^3$$

Maka, $\det(A_4) = \frac{1}{|B_{4-2}|} \cdot \begin{vmatrix} |C_{4-1}| & |D_{4-1}| \\ |E_{4-1}| & |F_{4-1}| \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a^3 & a^3 \\ ra^3 & a^3 + ra^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^6 + ra^6 - ra^6}{a^2} = a^4$$

Dilakukan langkah yang sama sampai dengan ordo 10×10. Setelah diperoleh nilai-nilai determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ ordo 3×3 sampai dengan 10×10, diduga rumus umum determinan interior matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ adalah $|B_{n-2}| = a^{n-2}$ dan untuk determinan uniknya yaitu $|C_{n-1}| = a^{n-1}, |D_{n-1}| = a^{n-1}$, $|E_{n-1}| = (-1)^n\, ra^{n-1}$, dan $|F_{n-1}| = a^{n-1} + (-1)^n\, ra^{n-1}$. Berdasarkan dugaan di atas, maka rumus umum determinan interior dan determinan unik matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ akan dibuktikan dalam Lemma.

Lemma 1. Diberikan matriks B_{n-2}, dengan B_{n-2} merupakan matriks interior dari suatu matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ yang terdapat dalam Persamaan (1), maka determinan dari matriks B_{n-2} adalah

$$|B_{n-2}| = a^{n-2} \qquad , n \geq 3$$

Bukti :
Pembuktian Lemma menggunakan induksi matematika

1. Basis Induksi
   Akan ditunjukkan bahwa $p(3)$ benar.
   Perhatikan bahwa:
   $$\begin{aligned} p(3): |B_{3-2}| &= a^{3-2} \\ &= a \end{aligned}$$
2. Langkah Induksi
   Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, untuk $p(k): |B_k| = a^{k-2}, k \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $p(k+1)$ juga benar, yaitu
   $$p(k+1): |B_{k+1}| = a^{(k+1)-2} = a^{k-1}, k \geq 3 \tag{4}$$
   Pembuktian:
   $$|B_{k+1}| = \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{k+1}$$
   Lakukan ekspansi kofaktor sepajang kolom pertama:
   $$|B_{k+1}| = (-1)^{1+1}\, a \begin{vmatrix} a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_k - 0 + 0 - \cdots + 0 - 0 + 0$$
   $$\begin{aligned} |B_{k+1}| &= a|B_k| \\ &= a\,.\,a^{k-2} \\ &= a^{k-2+1} \\ &= a^{k-1} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

Dilihat dari langkah 1 dan 2 maka Lemma 1 terbukti benar.

Lemma 2 Diberikan suatu matriks A_n, dengan A_n merupakan suatu matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ ordo $n \times n (n \geq 3)$ pada Persamaan (1), yang mana memiliki determinan unik sebagai berikut:

i. $|C_{n-1}| = a^{n-1}$
ii. $|D_{n-1}| = a^{n-1}$
iii. $|E_{n-1}| = (-1)^n\, ra^{n-1}$
iv. $|F_{n-1}| = a^{n-1} + (-1)^n\, ra^{n-1}$.

Bukti :
Pembuktian Lemma menggunakan induksi matematika

i. Akan dibuktikan bahwa bentuk umum determinan unik $|C_{n-1}| = a^{n-1}$ benar.
   1. Basis Induksi
      Akan ditunjukkan bahwa $p(3)$ benar.
      Perhatikan bahwa:
      $$\begin{aligned} p(3): |C_{3-1}| &= a^{3-1} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

2. Langkah Induksi

Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, untuk $p(k): |C_k| = a^{k-1}, k \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$p(k+1): |C_{k+1}| = a^{(k+1)-1} = a^k, k \geq 3$

Pembuktian:

$$|C_{k+1}| = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{k+1}$$

Lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama:

$$|C_{k+1}| = (-1)^{1+1}\, a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{k}$$

$$+(-1)^{1+2}\, a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{k} + \cdots - 0 + 0 - 0 + 0$$

Berdasarkan Teorema 3 maka determinan pada suku ke-2 adalah 0, dikarenakan suku ke-2 memiliki kolom bilangan nol. Maka hasil ekspansi kofaktor di sepanjang baris pertama adalah:

$$|C_{k+1}| = (-1)^{1+1}\, a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{k} - 0 + 0 - 0 + \cdots - 0 + 0 - 0$$

$$\begin{aligned} |C_{k+1}| &= a\,|C_k| \\ &= a \,.\, a^{k-1} \\ &= a^{k-1+1} \\ &= a^k (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

Dilihat dari langkah 1 dan 2 maka Lemma 2 (i) terbukti benar.

ii. Akan dibuktikan bahwa bentuk umum determinan unik $|D_{n-1}| = a^{n-1}$ benar.

1. Basis Induksi

Akan ditunjukkan bahwa $p(3)$ benar.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} p(3): |D_{3-1}| &= a^{3-1} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

2. Langkah Induksi

Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, untuk $p(k): |D_k| = a^{k-1}, k \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$p(k+1): |D_{k+1}| = a^{(k+1)-1} = a^k, k \geq 3$

Pembuktian:

$$|D_{k+1}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}_{k+1}$$

Lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama:

$$|D_{k+1}| = (-1)^{1+1}\, a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}_{k} - 0 + 0 - \cdots + 0 - 0$$

$+0 - 0$

$$\begin{aligned} |D_{k+1}| &= a\,|D_k| \\ &= a\,.\,a^{k-1} \\ &= a^{k-1+1} \\ &= a^k \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Dilihat dari langkah 1 dan 2 maka Lemma 2 (ii) terbukti benar.

iii. Akan dibuktikan bahwa bentuk umum determinan unik $|E_{n-1}| = (-1)^n\, ra^{n-1}$ benar.

1. Basis Induksi

Akan ditunjukkan bahwa $p(3)$ benar.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} p(3): |E_{3-1}| &= (-1)^3\, ra^{3-1} \\ &= -ra^2 \end{aligned}$$

2. Langkah Induksi

Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, untuk $p(k): |E_k| = (-1)^k\, ra^{k-1}, k \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$\begin{aligned} p(k+1): |E_{k+1}| &= (-1)^{k+1}\, ra^{(k+1)-1} \\ &= (-1)^{k+1}\, ra^k, k \geq 3 \end{aligned}$$

Pembuktian:

$$|E_{k+1}| = \begin{vmatrix} 0 & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ ra & ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+1}$$

Lakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua:

$$|E_{k+1}| = (-1)^{1+2}\, a \begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_k + 0 - 0 + \cdots - 0 + 0$$

$$-0 + (-1)^{k+2}\, ra \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_k$$

Berdasarkan Teorema 3 maka determinan pada suku ke-$(k+2)$ adalah 0, dikarenakan suku ke-$(k+2)$ memiliki kolom bilangan nol. Maka hasil ekspansi kofaktor di sepanjang kolom kedua adalah:

$$|E_{k+1}| = (-1)^{1+2}\, a \begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_k + 0 - 0 + \cdots - 0 + 0$$

$$-0 + 0$$

$$\begin{aligned} |E_{k+1}| &= -a\, |E_k| \\ &= -a\,.(-1)^k\, ra^{k-1} \\ &= (-1)^1 a^1.(-1)^k\, ra^{k-1} \\ &= (-1)^{k+1}\, ra^{k-1+1} \\ &= (-1)^{k+1}\, ra^k \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

Dilihat dari langkah 1 dan 2 maka Lemma 4.2 (iii) terbukti benar.

Setelah dilakukan pembuktian bentuk umum determinan interior dan determinan unik, maka bentuk umum determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ ordo $n \times n (n \geq 3)$ menggunakan metode Salihu akan dibuktikan pada Teorema berikut:

Teorema 5 Diberikan suatu matriks A_n, dengan A_n merupakan suatu matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ordo $n \times n (n \geq 3)$ pada Persamaan (1.1) dengan dugaan bentuk umum determinannya adalah

$$|A_n| = a^n \qquad , n \geq 3$$

Bukti :

Pembuktian teorema ini menggunakan langkah-langkah metode Salihu

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{1}{|B_{n-2}|}.\begin{vmatrix} |C_{n-1}| & |D_{n-1}| \\ |E_{n-1}| & |F_{n-1}| \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{a^{n-2}}.\begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-1} \\ (-1)^n\, ra^{n-1} & a^{n-1} + (-1)^n\, ra^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(a^{n-1})^2 + (-1)^n\, ra^{n-1}.a^{n-1} - (-1)^n\, ra^{n-1}.a^{n-1}}{a^{n-2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a^{n-1})^2}{a^{n-2}}$$
$$= \frac{a^{2n-2}}{a^{n-2}}$$
$$= a^{2n-2} \,.\, a^{-(n-2)}$$
$$= a^{2n-2} \,.\, a^{-n+2}$$
$$= a^{2n-2-n+2}$$
$$= a^{n} \text{ (terbukti)}$$

Berdasarkan Persamaan diatas maka Teorema 5 terbukti benar.

Contoh :

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan metode Salihu

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dapat ditulis $A_3 = RFPrLrRcirc_r(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ dengan $n = 3, a = \frac{1}{2}$, dan $r = 2$.

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 5 maka hasil determinannya adalah

$$|A_n| = \frac{1}{a^{n-2}} \cdot \begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-1} \\ (-1)^n\, ra^{n-1} & a^{n-1} + (-1)^n\, ra^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}} \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \\ (-1)^3 \,.\, 2 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} + (-1)^3 \,.\, 2 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 + (-1)^3 \,.\, 1^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)^3 \,.\, 1^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}25$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan,maka dapat disimpulkan bahwa bentuk umum determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ ordo $n \times n (n \geq 3)$ Menggunakan Metode Salihu adalah

$$|A_n| = a^n \qquad , n \geq 3$$

Daftar Pustaka

[1] X. Pan and M. Qin, “The Discriminance for FLDcirc r Matrices and the Fast Algorithm of Their Inverse and Generalized Inverse,” no. June, pp. 54–61, 2015.

[2] Z. Jiang and Z. Xu, “Efficient Algorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse Of Fls R -Circulant Matrix,” vol. 18, no. 1, pp. 45–57, 2005.

[3] J. Li, “On Explicit Determinants of the RFMLR and RLMFL Circulant Matrices Involving Certain Famous Numbers,” vol. 12, no. 1, 2013.

[4] X. Cui and N. Jiang, “On nonsingularity of RSFPLR circulant matrices Main Results,” no. X, pp. 1–7.

[5] T. Xu, Z. Jiang, and Z. Jiang, “Explicit Determinants of the RFPrLrR Circulant and RLPrFrL Circulant Matrices Involving Some Famous Numbers,” vol. 2014.

[6] A. N. Rahma, K. Swandayani, and C. C. Marzuki, “Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus n × n, n ≥ 3 Menggunakan Metode Salihu,” vol. 8, no. 1, pp. 27–34, 2019, doi: 10.14421/fourier.2019.81.27-34.

[7] A. Bahota, M. M., and A. Aziskhan, “Menghitung Determinan matriks n×n (n≥3) dengan menggunakan metode salihu,” vol. 1, no. 02, pp. 344–350, 2014.

[8] N. Aprianti, “Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus n × n, (n ≥ 3) Menggunakan Ekspansi Kofaktor,” 2020.

[9] D. H. Karso, “Modul 1 Aljabar Linear,” pp. 1–51.

[10] N. A Sudibyo, “Teorema, Operasi Matriks,” 2020.

[11] D. Mamula and N. Achmad, “Matriks Circulant Kompleks Bentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat,” vol. 17, no. 2, pp. 109–118, 2021, doi: 10.24198/jmi.v17.n2.34441.109-118.

[12] K. Rajesh, N. Elumalai, and M. Kavitha, “On s-normal Circulant and con-s-normal Circulant Matrices,” no. 5, pp. 173–178, 2018.

[13] T. A. Nurman, “Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal,” pp. 33–40, 2016.

[14] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi*. 2004.

[15] R. Munir, “Matematika Diskrit,” 2010.