

Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Antraks Tipe SVEIQR pada Ternak

Sigit Sugiarto¹, Asmirani Alam²

¹ Program Studi Pendidikan Matematika

² Program Studi Peternakan

Program Studi Diluar Kampus Utama (PSDKU) Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka, Kec. Teluk Ambon, Kota Ambon, 97233

Email: sigith.sugiarto@gmail.com¹, asmirani.alam24@gmail.com²

Korespondensi penulis : sigith.sugiarto@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis penyebaran penyakit antraks pada ternak dengan tipe SVEIQR, yaitu dengan perlakuan berupa vaksinasi, karantina dan pengobatan. Untuk tujuan tersebut akan ditentukan titik tetap dan bilangan reproduksi dasar. Ada dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Berdasarkan hasil analisis pada model diperoleh bahwa titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil asimtotik local ketika reproduksi dasar bernilai kurang dari satu dan titik tetap endemik bersifat stabil asimtotik lokal ketika reproduksi dasar bernilai lebih dari satu. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan sifat kestabilan pada titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik.

Kata Kunci: Analisis kestabilan, penyakit antraks, sistem dinamik, titik tetap.

Abstract

This study aims to analyze the spread of anthrax in livestock with the SVEIQR type, namely by treatment in the form of vaccination, quarantine and treatment. For this purpose a equilibrium point and basic reproduction number will be determined. There are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Based on the results of the analysis on the model, it was found that the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable when basic reproduction number less than one and the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable when basic reproduction number more than one. Numerical simulations performed show results that are in accordance with the characteristics of stability at disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point.

Keywords: Stability analysis, anthrax disease, dynamical system, equilibrium point.

1. Pendahuluan

Peternakan adalah kegiatan memelihara hewan ternak dengan tujuan untuk dibudidayakan dan memperoleh keuntungan dari hasilnya. Sektor peternakan memegang peranan penting dalam pemenuhan kebutuhan pangan bagi masyarakat [1]. Usaha peternakan, jika dijalankan dengan baik dan berwawasan ekonomi, dapat menjadi motor penggerak ekonomi yang berkerakyatan. Usaha peternakan dapat meningkatkan pendapatan dan kesejahteraan masyarakat, terutama masyarakat peternakan [1][2]. Namun, perlu diwaspadai faktor-faktor yang dapat menimbulkan kerugian dalam usaha peternakan.

Serangan berbagai jenis penyakit ternak merupakan salah satu risiko utama yang harus diperhatikan oleh para peternak [3]. Penyakit ternak dapat menjadi penghambat serius bagi produksi dan reproduksi hewan ternak. Penyakit yang bersifat menular dapat dengan cepat menyebar di antara populasi ternak dan menyebabkan kerugian yang besar. Oleh karena itu, penanganan penyakit hewan harus dilakukan secara cepat, tepat, dan efektif [4]. Salah satu kebijakan kesehatan hewan yang penting adalah melindungi budidaya ternak dari ancaman wabah penyakit, terutama terhadap penyakit strategis.

Salah satu jenis penyakit hewan menular strategis adalah antraks (radang limpa) [5]. Antraks adalah penyakit hewan menular yang serius dan mematikan yang disebabkan oleh bakteri *Bacillus Anthracis* [6][7]. Bakteri ini dapat membentuk spora yang tahan lama dalam lingkungan dan dapat bertahan selama bertahun-tahun. Antraks dapat menyerang berbagai jenis hewan ternak, terutama hewan herbivora [8][9] seperti sapi, kambing, domba, kerbau, dan kuda. Namun, hewan liar seperti gajah, kijang, dan hewan herbivora lainnya juga dapat terinfeksi oleh penyakit ini.

Pencegahan penyakit antraks pada ternak perlu dilakukan secara teratur dan berkelanjutan. Kolaborasi dengan pihak berwenang dan dinas peternakan setempat sangat penting dalam upaya pencegahan dan pengendalian penyakit antraks. Vaksinasi secara rutin pada daerah yang pernah terjangkit antraks merupakan salah satu langkah untuk membantu mencegah terjadinya wabah penyakit tersebut. Pencegahan penyebaran penyakit antraks dapat dilakukan dengan beberapa cara [10], diantaranya adalah vaksinasi secara rutin, menghindari kontak langsung dengan hewan yang telah terinfeksi, melakukan karantina terhadap ternak yang telah terjangkit penyakit, dan pemberian obat antibiotik terhadap ternak yang terjangkit penyakit antraks.

Penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan secara matematis dengan tujuan memprediksi pola penyebaran penyakit dan menentukan tindakan yang efektif dan efisien untuk menanggulangi penyebaran penyakit tersebut. Dengan demikian, dapat dilakukan upaya berupa pencegahan dan pengobatan agar penyakit antraks pada ternak dapat dikendalikan [11]. Penelitian terhadap model penyebaran penyakit antraks pada ternak telah banyak dilakukan oleh para ahli, diantaranya penelitian tentang model penyebaran penyakit antraks dengan kasus manusia yang terinfeksi dan vaksinasi pada ternak [4] dan penelitian tentang model penyebaran penyakit antraks dengan vaksinasi dan pengobatan [11]. Penelitian terdahulu belum melakukan analisis tentang model penyebaran penyakit antraks pada ternak dengan karantina. Sehingga dalam penelitian ini dilakukan modifikasi analisis model penyebaran penyakit antraks dengan vaksinasi,

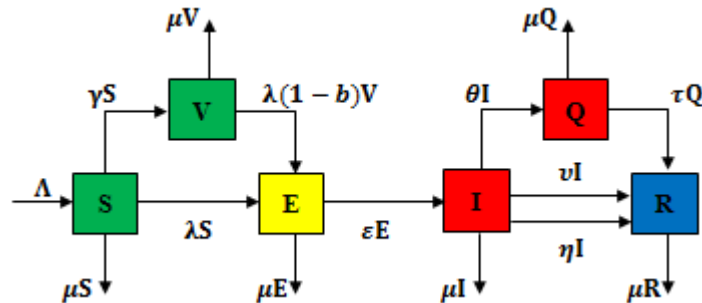
karantina dan pengobatan. Sehingga dapat diketahui pengaruh vaksinasi, karantina dan pengobatan terhadap dinamika penyebaran penyakit antraks dalam populasi ternak.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian studi literatur yang bertujuan untuk menganalisis model penyebaran penyakit antraks pada ternak. Penelitian ini menganalisis model matematika penyebaran penyakit antraks pada ternak dengan tipe SVEIQR pada Alam dan Sugiarto [12] yang merupakan pengembangan dan modifikasi model Asikin [11] dengan berdasarkan pedoman Ditjen PKH [10]. Populasi ternak dalam penelitian ini terbagi dalam enam kompartemen/kelas, yaitu kelas rentan (S), kelas ter vaksin (V), kelas terekspos (E), kelas terinfeksi (I), kelas terkarantina (Q), dan kelas sembuh (R). Selanjutnya, diperoleh diagram alir penyebaran penyakit antraks yang terdiri atas enam kompartemen. Diagram alir pembagian kompartemen model dapat dilihat pada Gambar 1.

Perumusan model matematika penyebaran penyakit antraks dalam penelitian ini menggunakan batasan atau pertimbangan sebagai berikut:

1. Rekrutmen kelahiran hanya terjadi pada individu pada kelas rentan;
2. Vaksinasi diberikan pada individu pada kelas rentan;
3. Karantina dilakukan pada individu pada kelas terinfeksi;
4. Pengobatan hanya diberikan pada individu pada kelas terinfeksi;
5. Individu yang dikarantina yang terinfeksi dapat sembuh dengan tanpa pengobatan; dan
6. Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan terhadap penyakit antraks.



Gambar 1. Diagram Alir Penyebaran Penyakit Antraks pada Ternak

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Matematika

Penyebaran penyakit antraks selanjutnya dirumuskan ke dalam model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (\lambda + \gamma + \mu)S \\
 \frac{dV}{dt} &= \gamma S - \lambda(1 - b)V - \mu V \\
 \frac{dE}{dt} &= \lambda S + \lambda(1 - b)V - (\varepsilon + \mu)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\theta + v + \eta + \mu)I
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \theta I - (\tau + \mu)Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \tau Q + vI + \eta I - \mu R$$

dengan $\lambda = \frac{\beta(I+\delta Q)}{N}$.

Penelitian ini menggunakan nilai parameter seperti dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Nilai Parameter Model

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
Λ	Laju rekrutmen kelahiran pada ternak	1.200	[12]
β	Laju penularan bakteri <i>Bacillus anthracis</i>	0,05601047	[6]
δ	Parameter infeksi dari ternak yang dikarantina	0,15	[12]
γ	Laju vaksinasi pada ternak	0,15 – 0,95	[12]
b	Efektivitas vaksinasi yang digunakan	0,45 – 0,95	[12]
ε	Laju perpindahan ternak terpapar ke dalam kelas terinfeksi	0,6	[6]
θ	Laju karantina pada ternak	0,15-0,95	[12]
v	Efektivitas pengobatan	0,05	[6]
η	Laju penyembuhan ternak terinfeksi	0,0025	[6]
τ	Laju penyembuhan ternak yang dikarantina	0,0025	[12]
μ	Laju kematian alami pada ternak	0,0004	[6]

Selanjutnya, dilakukan penentuan titik tetap dan sifat kestabilan dari model matematika hasil modifikasi.

3.2 Penentuan Titik Tetap

Sistem Persamaan (1) memiliki titik tetap yang diperoleh melalui penyelesaian persamaan $\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Selanjutnya, diperoleh dua jenis titik tetap berupa titik tetap bebas penyakit

$$T^0(S, V, E, I, Q, R) = (S^0, V^0, 0, 0, 0, 0)$$

dimana

$$S^0 = \frac{\Lambda}{\gamma + \mu} \quad \text{dan} \quad V^0 = \frac{\gamma \Lambda}{\mu(\gamma + \mu)}$$

dan titik tetap endemik

$$T^*(S, V, E, I, Q, R) = (S^*, V^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$$

dimana

$$S^* = \frac{\Lambda}{\lambda + \gamma + \mu'}, \quad I^* = \frac{\varepsilon E - \eta I}{\theta + v + \mu'}$$

$$V^* = \frac{\gamma S}{(1 - b)\lambda + \mu'}, \quad Q^* = \frac{\theta I}{\tau + \mu'}$$

$$E^* = \frac{\lambda S + (1 - b)\lambda V}{\varepsilon + \mu}, \quad R^* = \frac{\tau Q + vI + \eta I}{\mu}$$

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Penentuan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) menggunakan pendekatan matriks generasi berikutnya [13]. Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan didasarkan pada subpopulasi-subpopulasi penyebab infeksi [14][15], sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \lambda S + \lambda(1-b)V - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\theta + v + \eta + \mu)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \theta I - (\tau + \mu)Q\end{aligned}\tag{2}$$

Selanjutnya, ditentukan vektor \mathcal{F}_i dan V_i berdasarkan sistem Persamaan (2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda S + \lambda(1-b)V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_i &= \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon + \mu)E \\ -\varepsilon E + (\theta + v + \eta + \mu)I \\ -\theta I + (\tau + \mu)Q \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta\Delta & \delta\beta\Delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dimana

$$\Delta = \left(\frac{(1-b)\gamma + \mu}{\gamma + \mu} \right)$$

dan

$$V = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & l_2 & 0 \\ 0 & -\theta & l_3 \end{pmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned}l_1 &= \varepsilon + \mu, & l_3 &= \tau + \mu. \\ l_2 &= \theta + v + \eta + \mu,\end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan matriks G , dengan $G = FV^{-1}$ sebagai berikut:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned}G_{11} &= \frac{\varepsilon\beta\Delta}{l_1 l_2} + \frac{\varepsilon\theta\beta\Delta}{l_1 l_2 l_3}, \\ G_{12} &= \frac{\beta\Delta}{l_2} + \frac{\theta\beta\Delta}{l_2 l_3}, \text{ dan} \\ G_{13} &= \frac{\theta\beta\Delta}{l_3}.\end{aligned}$$

Nilai \mathcal{R}_0 adalah nilai eigen dominan pada matriks G , yaitu:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Delta\beta\varepsilon(k_3 + \delta\theta)}{l_1 l_2 l_3} = \mathcal{R}_0^1 + \mathcal{R}_0^2$$

dimana

$$\mathcal{R}_0^1 = \frac{\Delta\beta\varepsilon}{l_1 l_2} \text{ dan } \mathcal{R}_0^2 = \frac{\Delta\beta\varepsilon\delta\theta}{l_1 l_2 l_3}.$$

3.4 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Bagian ini memaparkan sifat-sifat kestabilan titik tetap model penyebaran penyakit antraks, yaitu titik tetap tanpa penyakit T^0 dan titik tetap endemik T^* .

Teorema 1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik tetap tanpa penyakit T^0 untuk sistem Persamaan (1) bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti. Melalui pelinearan sistem Persamaan (1) di sekitar T^0 , maka sifat kestabilan $T^0(S, V, E, I, Q, R) = \left(\frac{\Lambda}{\gamma+\mu}, \frac{\gamma\Lambda}{\mu(\gamma+\mu)}, 0, 0, 0, 0\right)$ dapat diketahui. Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobi untuk titik tetap tanpa penyakit T^0 sebagai berikut:

$$J_{T^0} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 & J_{14} & J_{15} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & J_{24} & J_{25} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & J_{34} & J_{35} & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & J_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= -(\gamma + \mu), & J_{35} &= \beta\delta\Delta, \\ J_{14} &= -\frac{\beta\mu}{\gamma+\mu}, & J_{43} &= \varepsilon, \\ J_{15} &= -\frac{\beta\delta\mu}{\gamma+\mu}, & J_{44} &= -(\theta + v + \eta + \mu), \\ J_{21} &= \gamma, & J_{54} &= \theta, \\ J_{22} &= -\mu, & J_{55} &= -(\tau + \mu), \\ J_{24} &= -(1-b)\left(\frac{\beta\gamma}{\gamma+\mu}\right), & J_{64} &= \tau + v, \\ J_{25} &= -(1-b)\left(\frac{\beta\gamma\delta}{\gamma+\mu}\right), & J_{65} &= \tau, \\ J_{33} &= -(\varepsilon + \mu), & J_{66} &= -\mu, \\ J_{34} &= \beta\Delta, \end{aligned}$$

Nilai eigen titik tetap tanpa penyakit T^0 diperoleh dengan cara $|J_{T_0} - \lambda I| = 0$, atau

$$\begin{vmatrix} J_{11} - \lambda & 0 & 0 & J_{14} & J_{15} & 0 \\ J_{21} & J_{22} - \lambda & 0 & J_{24} & J_{25} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} - \lambda & J_{34} & J_{35} & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & J_{55} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{64} & J_{65} & J_{66} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(J_{11} - \lambda)(J_{22} - \lambda)(J_{66} - \lambda)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0 \quad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= l_1 + l_2 + l_3 \\ a_2 &= (1 - \mathcal{R}_0^1)l_1l_2 + l_1l_3 + l_2l_3 \\ a_3 &= (1 - \mathcal{R}_0)l_1l_2l_3 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3), terdapat enam nilai eigen dengan tiga nilai eigen bernilai negatif, yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= J_{11} = -(\gamma + \mu), & \lambda_3 &= J_{66} = -\mu. \\ \lambda_2 &= J_{22} = -\mu, \end{aligned}$$

Sedangkan tiga nilai eigen lainnya dapat diperoleh melalui penyelesaian persamaan berikut:

$$(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) pada titik tetap T^0 bersifat stabil jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz [16][17], berikut:

$a_1 > 0, a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$.

Koefisien a_1 bernilai positif karena semua parameter bernilai positif. Koefisien a_3 akan bernilai positif ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Selanjutnya, jelas bahwa $a_1 a_2 > a_3$. Jadi, terbukti bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik tetap tanpa penyakit T^0 untuk sistem Persamaan (1) bersifat stabil asimtotik lokal.

Teorema 2. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik tetap endemik T^* bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti. Misalkan $\phi = \beta$ merupakan parameter bifurkasi. Berdasarkan kondisi $\mathcal{R}_0 = 1$ mengakibatkan

$$\phi = \phi^* = \frac{l_1 l_2 l_3}{\Delta \varepsilon (k_3 + \vartheta \theta)} \quad (5)$$

Titik tetap T^0 memiliki satu nilai eigen nol dan lima nilai eigen negatif ketika $\mathcal{R}_0 = 1$ atau $\phi = \phi^*$. Nilai eigen nol tersebut memiliki vektor eigen kanan $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ dan vektor eigen kiri $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$. Misalkan $u_3 > 0$, maka

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{\varepsilon}{l_2} u_3 > 0, \\ u_5 &= \frac{\theta \varepsilon}{l_3 l_2} u_3 > 0, \\ u_6 &= \left(\frac{\varepsilon}{l_2} + \frac{\theta \varepsilon}{l_3 l_2} \right) u_3 > 0, \\ u_1 &= - \left(\frac{\beta \mu}{(\gamma + \mu)^2 l_2} + \frac{\beta \delta \mu}{(\gamma + \mu)^2 l_3 l} \frac{\theta \varepsilon}{l} \right) u_3 < 0, \\ u_2 &= - \left(\left(\frac{\beta \varepsilon \mu}{l_2 (\gamma + \mu)^2} + \frac{\beta \varepsilon \delta \theta \mu}{l_2 l_3 (\gamma + \mu)^2} \right) + (1 - b) \left(\frac{\beta \gamma}{\gamma + \mu} \right) \frac{\varepsilon}{\mu l_2} + (1 - b) \left(\frac{\beta \gamma \delta}{\gamma + \mu} \right) \frac{\varepsilon \theta}{\mu l_2 l_3} \right) u_3 < 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya misalkan $v_3 > 0$, maka

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 = v_6 = 0, \\ v_4 &= \frac{\Delta \beta}{l_2} v_3 > 0, \\ v_5 &= \frac{\Delta \beta \delta}{l_3} v_3 > 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan Castillo-Chaves dan Song [16][18] didefinisikan

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k,i,j=1}^6 v_k u_i u_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (T^0, \phi^*), \text{ dan} \\ b &= \sum_{k,i,j=1}^6 v_k u_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi} (T^0, \phi^*) \end{aligned} \quad (6)$$

dengan

$$\begin{aligned} x_1 &= S, & x_2 &= V, & x_3 &= E, \\ x_4 &= I, & x_5 &= Q, & x_6 &= R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \Lambda - \left(\frac{\varphi(x_4 + \delta x_5)}{N} + \gamma + \mu \right) x_1 \\ f_2 &= \frac{dx_2}{dt} = \gamma x_1 - \frac{\varphi(x_4 + \delta x_5)}{N} (1 - b) x_2 - \mu x_2 \\ f_3 &= \frac{dx_3}{dt} = \frac{\varphi(x_4 + \delta x_5)}{N} x_1 + \frac{\varphi(x_4 + \delta x_5)}{N} (1 - b) x_2 - (\varepsilon + \mu) x_3 \\ f_4 &= \frac{dx_4}{dt} = \varepsilon x_3 - (\theta + \nu + \eta + \mu) x_5 \end{aligned}$$

$$f_5 = \frac{dx_5}{dt} = \theta x_4 - (\tau + \mu)x_5$$

$$f_6 = \frac{dx_6}{dt} = \tau x_5 + \nu x_4 + \eta x_4 - \mu x_6.$$

Berdasarkan persamaan (6) diperoleh

$$a = v_3 \left(u_1 u_4 \frac{b\gamma\mu\phi^*}{\Lambda(\gamma+\mu)} + u_1 u_5 \frac{b\delta\gamma\mu\phi^*}{\Lambda(\gamma+\mu)} + u_2 u_4 \frac{b\mu^2\phi^*}{\Lambda(\gamma+\mu)} + u_2 u_5 \frac{b\delta\mu^2\phi^*}{\Lambda(\gamma+\mu)} \right).$$

Karena $v_3, u_4, u_5 > 0$ dan $u_1, u_2 < 0$, maka $a < 0$ dan diperoleh

$$b = v_3 u_4 \Delta + v_3 u_5 \delta \Delta.$$

Karena $v_3, u_4, u_5 > 0$ maka $b > 0$.

Nilai a dan b yang diperoleh memenuhi kriteria kasus 4 pada Teorema Castillo-Chavez dan Song [16][18]. Akibatnya, ketika φ berubah dari $\varphi < \varphi^*$ ($\mathcal{R}_0 < 1$) menjadi $\varphi > \varphi^*$ ($\mathcal{R}_0 > 1$), maka titik tetap endemik T^* yang tidak stabil berubah dari negatif menjadi positif dan stabil asimtotik lokal. Jadi, terbukti bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik tetap endemik T^* bersifat stabil asimtotik lokal.

3.5 Simulasi Numerik

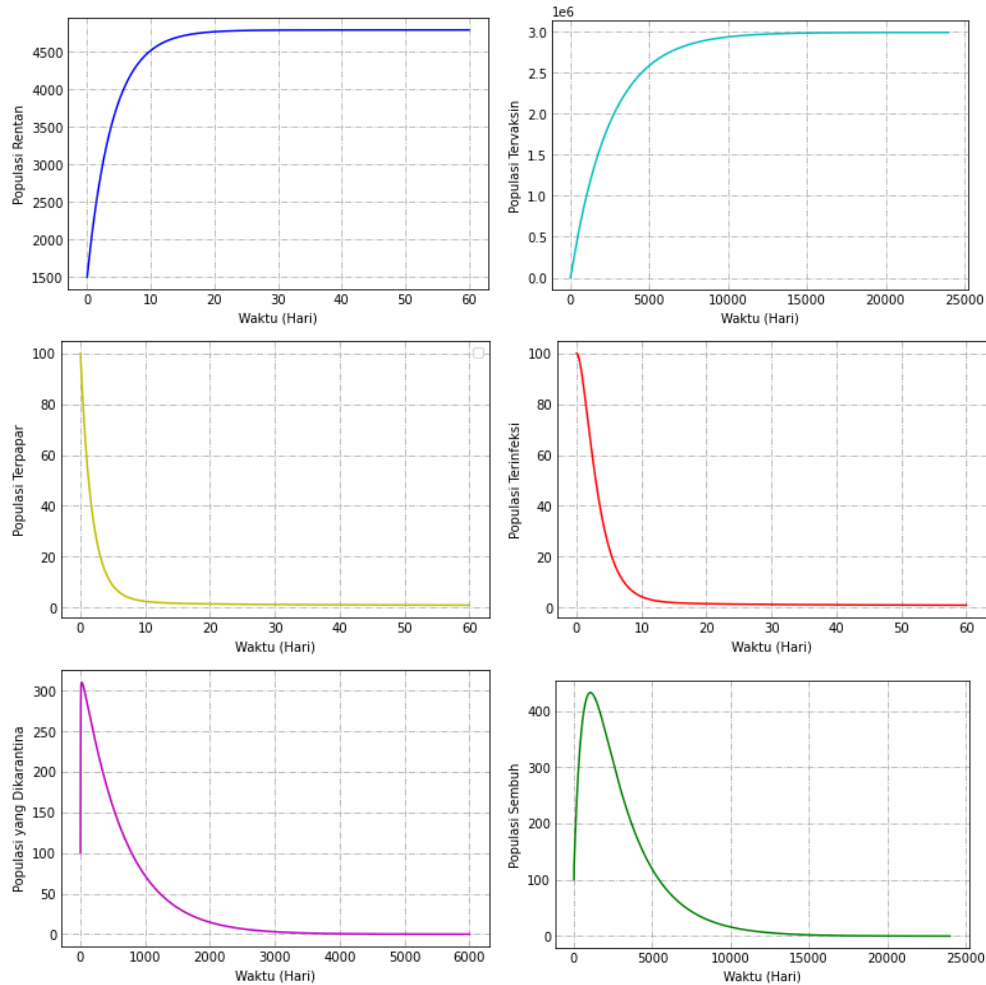
Simulasi numerik pada model matematika penyebaran penyakit antraks dilakukan untuk menunjukkan kestabilan dan memperlihatkan kembali sifat kestabilan dari titik tetap dengan memasukkan nilai-nilai parameter pada Tabel 2. Selain itu, simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui hal-hal yang terjadi dalam dinamika populasi. Dalam hal ini, dinamika populasi ternak dan melakukan perubahan nilai parameter, yaitu pada parameter yang memungkinkan untuk dikendalikan oleh manusia dalam upaya pengendalian penyebaran penyakit antraks, diantaranya adalah parameter laju vaksinasi (γ), kemanjuran vaksin (b), dan laju karantina (θ).

Tabel 2. Variasi Nilai Parameter

Parameter	$\mathcal{R}_0 < 1$		$\mathcal{R}_0 > 1$	
	Nilai	Sumber	Nilai	Sumber
γ	0,45	Asumsi	0,25	Asumsi
b	0,85	Asumsi	0,55	Asumsi
θ	0,60	Asumsi	0,20	Asumsi

Nilai parameter lain yang digunakan dalam simulasi numerik dapat dilihat pada Tabel 1. Karena parameter yang dapat diubah dalam penelitian ini adalah parameter γ , b dan θ , maka nilai parameter yang diubah dalam penelitian adalah nilai parameter γ , b dan θ . Dinamika populasi diamati ketika kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$. Nilai awal yang digunakan adalah $S(0) = 1.500, V(0) = 2.500, E(0) = 100, I(0) = 100, Q(0) = 100$, dan $R(0) = 100$.

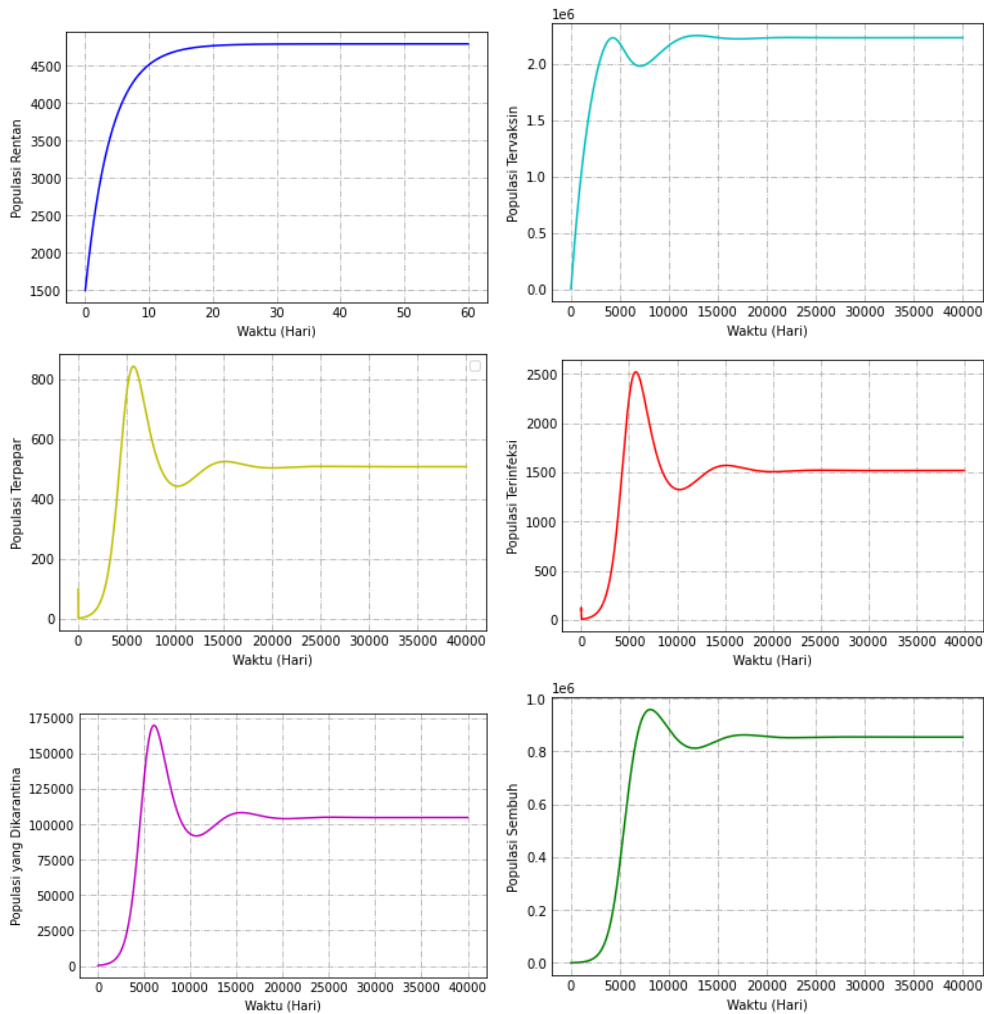
Sistem Persamaan (1) pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ memiliki satu titik tetap tanpa penyakit. Titik tetap diperoleh melalui penyelesaian secara numerik dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dengan $\mathcal{R}_0 = 0,414021 < 1$ dan titik tetap tanpa penyakit $T^0 (S = 2.664,3, V = 2,99734 \times 10^6, E = 0, A = 0, I = 0, R = 0)$. Linearisasi dan perhitungan terhadap sistem Persamaan (1) di sekitar titik tetap diperoleh matriks Jacobi dan nilai eigen untuk titik tetap tanpa penyakit, yaitu $\lambda_1 = -0,69806, \lambda_2 = -0,55643, \lambda_3 = -0,4504, \lambda_4 = -0,001715, \lambda_5 = -0,0004$, dan $\lambda_6 = -0,0004$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil.



Gambar 2. Dinamika Populasi Saat Kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

Dinamika subpopulasi dengan populasi rentan (S), populasi tervaksin (V), populasi terpapar (E), populasi terinfeksi (I), populasi yang dikarantina (Q), dan populasi yang pulih atau sembuh dari penyakit (R), menuju titik tetap tanpa penyakit T^0 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2. Populasi rentan dan populasi tervaksin mengalami kenaikan secara terus-menerus hingga mencapai kestabilan di sekitar titik tetap masing-masing, yaitu $S = 2.664,3$ dan $V = 2,99734 \times 10^6$. Populasi terpapar dan populasi terinfeksi mengalami penurunan secara terus-menerus hingga mencapai kestabilan di sekitar titik tetap $E = I = 0$. Sedangkan untuk populasi yang dikarantina dan populasi yang sembuh dari penyakit mula-mula mengalami kenaikan, kemudian turun secara terus-menerus hingga mencapai kestabilan di sekitar titik tetap $Q = R = 0$. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sama dengan Teorema 1, yaitu jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik tetap tanpa penyakit T^0 bersifat stabil asimtotik lokal.

Selain memiliki titik tetap tanpa penyakit, sistem dinamik juga memiliki satu titik tetap endemik. Titik tetap endemik dapat diperoleh melalui penyelesaian secara numerik dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dengan $\mathcal{R}_0 = 1,13211$. Titik tetap endemik adalah $T^*(S = 4.790,09, V = 2,64445 \times 10^6, E = 233,685, I = 554,412, Q = 38.235,3, R = 311.737)$.



Gambar 3. Dinamika Populasi Saat Kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Linearisasi dan perhitungan terhadap sistem (1) di sekitar titik tetap, diperoleh matriks Jacobi dan nilai eigen untuk titik tetap endemik, yaitu empat nilai eigen bernilai negatif dan dua nilai eigen yang bagian realnya negatif, yaitu $\lambda_1 = -0,633865$, $\lambda_2 = -0,250517$, $\lambda_3 = -0,222332$, $\lambda_4 = 0.0004$, $\lambda_5 = -0,000228437 - 0,000336i$, dan $\lambda_6 = -0,00022844 + 0,0003361i$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap endemik bersifat stabil.

Dinamika subpopulasi untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ ditunjukkan pada Gambar 3. Dinamika populasi menunjukkan bahwa subpopulasi-subpopulasi stabil di sekitar titik tetap endemik. Populasi rentan mengalami peningkatan secara terus-menerus hingga mencapai kestabilan di sekitar titik tetap yaitu $S = 4.790,09$. Populasi tervaksin mengalami peningkatan secara terus-menerus hingga mencapai kestabilan di sekitar titik tetap yaitu $V = 2,64445 \times 10^6$. Populasi terpapar, populasi terinfeksi, populasi yang dikarantina dan populasi sembuh mengalami fluktuasi, kemudian mencapai kestabilan di sekitar titik tetap masing-masing, yaitu $E = 233,685$, $I = 554,412$, $Q = 38.235,3$, dan $R = 311.737$. Simulasi numerik menunjukkan hasil seperti pada Teorema 2, yaitu jika $\mathcal{R}_0 > 1$, titik tetap endemik T^* bersifat stabil asimtotik lokal.

4. Kesimpulan

Penelitian ini merupakan analisis penyebaran penyakit Antraks pada ternak dengan tipe SVEIQR menggunakan pemodelan matematika. Model pada penelitian ini mempertimbangkan adanya vaksinasi terhadap ternak yang rentan, serta karantina dan pengobatan terhadap ternak yang terinfeksi. Model yang dikembangkan dapat menggambarkan penyebaran penyakit Antraks pada ternak. Hasil analisis terhadap model matematika diperoleh dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Jika kondisi bilangan reproduksi dasar kurang dari satu maka titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil asimtotik, sedangkan jika kondisi bilangan reproduksi dasar lebih dari satu maka titik tetap endemik bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik terhadap dinamika populasi menggambarkan sifat-sifat kestabilan pada titik tetap model penyebaran penyakit Antraks.

Daftar Pustaka

- [1] I. Trisman, M. M. Sulaeman, and M. Sulistyati, "Pengembangan Potensi Usaha Hasil Ternak Berbasis Populasi dan Kelembagaan di Provinsi Jawa Barat," *Mimb. Agribisnis Jurnal Pemikiran Masyarakat Ilmiah Berwawasan Agribisnis*, vol. 8, no. 1, p. 490, 2022.
- [2] A. M. HN, "Analisis Keuntungan Peternakan Sapi Potong Berbasis Pengembangan Energi Biogas dan Pupuk Organik di Kabupaten Sampang," *Jurnal Ilmiah Mahasiswa FEB*, 2017.
- [3] R. Islami, S. F. Zahra, P. Yuniastuti, P. E. A. Pranata, M. Sefi, and D. C. Widianingrum, "Pengetahuan, Kebijakan, dan Pengendalian Penyakit Antraks pada Ternak di Indonesia," *Jurnal Peternakan Sriwijaya*, vol. 10, no. 2, pp. 1–8, 2022.
- [4] Megawati, R. Ratianingsih, and Hajar, "Analisis Kestabilan Penyebaran Penyakit Antraks pada Populasi Hewan dengan Pemberian Vaksinasi: Studi Kasus untuk Infeksi pada Populasi Manusia," *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 2, pp. 172–184, 2020.
- [5] C. Clarasinta and T. U. Soleha, "Penyakit Antraks : Ancaman untuk Petani dan Peternak," *Majority*, vol. 7, no. 1, pp. 158–164, 2017.
- [6] D. Redhono *et al.*, "The Effect of Ethanolic Extract of Indonesian Propolis on Endothelial Dysfunction and Multi Organ Dysfunction Syndrome in Anthrax Animal Model," *Saudi J. Biol. Sci.*, vol. 29, no. 2, pp. 1118–1124, 2022.
- [7] T. Abayneh, B. Getachew, E. Gelaye, R. Traxler, and A. R. Vieira, "Viability Evaluation of Freeze Dried and Suspension Anthrax Spore Vaccine Formulations Stored at Different Temperatures," *Vaccine*, vol. 39, no. 42, pp. 6245–6249, 2021.
- [8] U. S. Elbahr *et al.*, "Factors Leading to Dissemination of Cutaneous Anthrax: an International ID-IRI Study," *New Microbes New Infect.*, vol. 48, pp. 1–6, 2022.
- [9] A. Kutmanova, M. Doganay, and S. Zholdoshev, "Human Anthrax in Kyrgyz Republic: Epidemiology and Clinical Features," *Journal of Infection Public Health*, vol. 13, no. 8, pp. 1161–1165, 2020.
- [10] Ditjen PKH, "Pedoman Pengendalian dan Pemberantasan Penyakit Hewan Menular (PHM): Seri Penyakit Antraks." Direktorat Jenderal Peternakan dan Kesehatan Hewan. Kementerian Pertanian, Jakarta (Indonesia), 2016.
- [11] N. P. Asikin, "VSEIR Mathematical Model on Anthrax Disease Dissemination in

- Animal Population with Vaccination and Treatment Effect,” *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 17, no. 1, pp. 14–25, 2020.
- [12] A. Alam and S. Sugiarto, “Analisis Sensitivitas Model Matematika Penyebaran Penyakit Antraks pada Ternak dengan Vaksinasi, Karantina dan Pengobatan,” *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 19, no. 2, pp. 180–191, 2022.
- [13] P. Van Den Driessche and J. Watmough, “Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission,” *Math Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, 2002.
- [14] S. Sugiarto, R. MA, and S. Nurwijaya, “Dynamical System for Covid-19 Outbreak Within Vaccination Treatment,” *BAREKENG Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 2 SE-Articles, Jun. 2023.
- [15] S. Nurwijaya, R. MA, and S. Sugiarto, “Dynamical System for Ebola Outbreak Within Quarantine and Vaccination Treatments,” *BAREKENG Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 2 SE-Articles, Jun. 2023.
- [16] S. F. Al-Azzawi, “Stability and Bifurcation of Pan Chaotic System by using Routh-Hurwitz and Gardan Methods,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 3, pp. 1144–1152, 2012.
- [17] K. Das, B. S. N. Murthy, S. A. Samad, and M. H. A. Biswas, “Mathematical Transmission Analysis of SEIR Tuberculosis Disease Model,” *Sensors International*, vol. 2, no. April, p. 100120, 2021.
- [18] M. M. Ojo and E. F. D. Goufo, “Modeling, Analyzing and Simulating the Dynamics of Lassa Fever in Nigeria,” *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, vol. 30, no. 1, pp. 1–31, 2022.