

Analisis Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II, Infeksi pada Pemangsa dan Pemanenan pada Mangsa

Fardinah¹, Hikmah², Apriyanto³

^{1,2} Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat

Jalan. Prof. Dr. Baharuddin Lopa, SH. Talumung, Majene Sulawesi Barat

³ Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat

Jalan. Prof. Dr. Baharuddin Lopa, SH. Talumung, Majene Sulawesi Barat

Email: fardinah@[unsulbar.ac.id](mailto:fardinah@unsulbar.ac.id)¹, hikmah@[unsulbar.ac.id](mailto:hikmah@unsulbar.ac.id)², riyadh.math06@gmail.com³

Korespondensi penulis : fardinah@[unsulbar.ac.id](mailto:fardinah@unsulbar.ac.id)

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II. Infeksi penyakit hanya terjadi pada populasi pemangsa dan menyebabkan kematian. Selain itu dilakukan pemanenan pada mangsa dengan asumsi mangsa memiliki nilai ekonomis. Penelitian ini bertujuan untuk memformulasikan model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model dan interpretasi model. Analisis kestabilan dilakukan dengan metode linearisasi. Jenis kestabilan ditentukan berdasarkan karakteristik nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Dari penelitian ini diperoleh bahwa kepunahan populasi tidak mungkin terjadi sedangkan mangsa eksis, kepunahan pemangsa sehat, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis masih memungkinkan terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan. Simulasi numerik menunjukkan bahwa laju pemanenan yang diperbesar mengakibatkan jumlah populasi mangsa terus mengalami penurunan secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan seiring berjalannya waktu. Semakin berkurangnya populasi mangsa ini mengakibatkan populasi pemangsa juga semakin berkurang secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan.

Kata Kunci: Holling Tipe II, Infeksi pada pemangsa, Model mangsa-pemangsa, Pemanenan

Abstract

This study discusses the predator-prey model with a Holling II Type response function. Disease infection occurs only in predator populations and causes death. In addition, prey harvesting is carried out assumption that prey has economic value. This study aims to formulate a predator-prey model with a Holling II Type response function, infection of predators, and harvesting of prey, analyze the stability of the model's equilibrium point, and

interpretation of the model. Stability analysis was carried out using the linearization method. The type of stability is determined based on the characteristic eigenvalues obtained using Routh-Hurwitz criteria. From this study, it was found that population extinction is not possible while prey exists, extinction of healthy predator, extinction of diseased predator and existing populations is still possible if the required conditions are satisfied. Numerical simulations show that an increased harvesting rate results in a significant decrease in the prey population and nearly extinction over time. The decrease in the prey population has resulted in the predator population also decreasing significantly and almost experiencing extinction.

Keywords: *Holling II Type, Infection in predator, Predator-prey model, Harvesting*

1. Pendahuluan

Model mangsa-pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926 yang selanjutnya dikenal dengan model Lotka-Volterra. Model mangsa-pemangsa kemudian terus mengalami perkembangan salah satunya adalah bentuk interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan fungsi respon. Fungsi respon dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan [1]. Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling Tipe I, Tipe II dan Tipe III [2]. Holling Tipe I mengasumsikan bahwa pemangsa memiliki karakteristik yang pasif dalam mencari mangsanya. Kemudian Holling Tipe II yang mengasumsikan bahwa pemangsa aktif dalam mencari mangsanya sedangkan Holling Tipe III mengasumsikan bahwa pemangsa akan mencari mangsa lain jika mangsa utamanya mengalami penurunan jumlah populasi [3].

Fungsi respon yang digunakan dalam penelitian ini yaitu fungsi respon Holling Tipe II. Tipe ini menggambarkan rata-rata tingkat konsumsi pemangsa ketika pemangsa menghabiskan waktu untuk mencari mangsa. Fungsi respon Holling Tipe II terjadi pada pemangsa dengan karakteristik aktif dalam mencari mangsanya. Fungsi ini akan meningkat jika konsumsinya mengalami penurunan dan konstan jika mencapai titik jenuh (*half saturation*) [4]. Penelitian model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya [5] mengenai analisis dinamik model mangsa-pemangsa dengan struktur usia dan perilaku anti pemangsa diperoleh bahwa kepunahan pemangsa dan eksistensi populasi dapat terjadi. Penelitian lain yaitu [6] mengenai analisis model mangsa-pemangsa dengan *protection zone* menggunakan fungsi respon Holling Tipe II diperoleh bahwa keadaan pemangsa punah dan eksistensi semua populasi dapat terjadi.

Selain model ekologi, masalah epidemiologi merupakan salah satu topik yang saat ini banyak dibahas dalam penelitian pemodelan matematika. Pemodelan matematika dalam epidemiologi memberikan pemahaman tentang mekanisme mendasar yang mempengaruhi penyebaran penyakit. Pada beberapa tahun terakhir penelitian mengenai ekologi dan epidemiologi banyak dilakukan. meskipun dua bidang ini berbeda

kontribusinya terhadap ilmu pengetahuan namun terdapat kesamaan di antara keduanya yaitu mencakup makhluk hidup [7].

Penelitian mengenai model mangsa-pemangsa dengan melibatkan populasi yang sakit dan pemanenan telah dilakukan beberapa peneliti sebelumnya diantaranya yaitu analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan pada pemangsa [8]. Dalam penelitian ini diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan kepunahan populasi mangsa terinfeksi dan titik kesetimbangan interior atau semua populasi ada. Dari analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa dua keadaan tersebut masih memungkinkan terjadi. Penelitian mengenai infeksi penyakit pada mangsa dan pemanenan pada pemangsa diantaranya yaitu penelitian dengan judul vaksinasi dan *treatment* pada mangsa-pemangsa dengan dua jenis pemangsa yang salah satunya terinfeksi [9].

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, peneliti tertarik untuk mengembangkan penelitian dengan menambahkan faktor penyakit dan pemanenan. Diasumsikan bahwa penyakit hanya menyebar dalam populasi pemangsa dan pemanenan dilakukan pada mangsa. Tujuan penelitian ini yaitu untuk memformulasikan model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model dan interpretasi model..

2. Metode Penelitian

Prosedur penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan asumsi, parameter dan memformulasi model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa.
2. Menentukan titik kesetimbangan model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa.
3. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa.
4. Melakukan simulasi numerik dan interpretasi model.

Berikut diberikan beberapa bahan pendukung dalam penelitian ini.

A. Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan. Fungsi respon dibagi atas tiga, yaitu fungsi respon Holling Tipe I, Tipe II dan Tipe III. Dalam penelitian ini digunakan fungsi respon Holling Tipe II. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik kejenuhan (half saturation). Hal ini disebabkan setiap pemangsa hanya dapat memakan sejumlah mangsa pada saat satu satuan waktu. Fungsi respon Holling Tipe II dirumuskan sebagai $F^{(II)}(x) = \frac{ax}{1+bx}$ dengan $F^{(II)}$ menyatakan fungsi Holling Tipe II, a tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa, b menyatakan waktu pencarian mangsa dan x menyatakan jumlah populasi mangsa [10].

B. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Berikut definisi titik kesetimbangan, matriks Jacobian dan linearisasi sistem.

Definisi 1 [11]

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik kesetimbangan sistem $\dot{x} = f(x)$.

Definisi 2 [12]

Diberikan sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dengan $f_i \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n, E \subset \mathbb{R}^n$ dan \bar{x} merupakan titik kesetimbangan sistem $\dot{x} = f(x)$. Matriks

$$Jf(\bar{x}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari Sistem $\dot{x} = f(x)$ dititik \bar{x} .

Definisi 3 [12]

Sistem $\dot{y} = Jf(\bar{x})y$ dengan $y = x - \bar{x}$ disebut linearisasi dari Sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik kesetimbangan \bar{x} .

Teorema 1 [12]

Misalkan \bar{x} adalah titik kesetimbangan hiperbolik Sistem $\dot{x} = f(x)$,

- i. jika bagian real semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ negatif, maka \bar{x} stabil asimtotik.
- ii. jika terdapat nilai eigen dari $Jf(\bar{x})$ dengan bagian real positif, maka \bar{x} tidak stabil.

Dalam penelitian ini digunakan metode kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan karakteristik akar persamaan tanpa perlu menyelesaikannya. Berikut ini diberikan definisi matriks Hurwitz dan determinannya.

Definisi 4 [13]

(i) Diberikan polinomial karakteristik matriks A.

$$P_A \lambda = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

dengan $a_0 \neq 0$. Diasumsikan semua a_k real dan $P_A \lambda$ tidak mempunyai akar imajiner murni. Matriks Hurwitz H didefinisikan sebagai matriks persegi yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

(ii) Determinan Matriks Hurwitz orde ke k, dinotasikan Δ_k yang dibentuk dari matriks Hurwitz berukuran n didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Dalam mengaplikasikan metode kriteria Routh-Hurwitz pada suatu persamaan karakteristik, berikut ini diberikan suatu teorema yang menjamin semua akar polinomial pada persamaan $P_A\lambda$ memiliki akar-akar dengan semua bagian realnya negatif.

Teorema 2 [13]

Semua akar polinomial persamaan $P_A\lambda$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika memenuhi:

$$a_0\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, a_0\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0,$$

$$\vdots$$

$$a_0\Delta_k > 0, \text{ untuk } k \text{ ganjil}$$

$$\Delta_k > 0, \text{ untuk } k \text{ genap.}$$

Jika polinomial persamaan $P_A\lambda$ dituliskan sedemikian hingga $a_0 > 0$, maka menurut kriteria Routh-Hurwitz semua akar polinomial persamaan $P_A\lambda$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\Delta_i > 0$ untuk semua $i \leq k$.

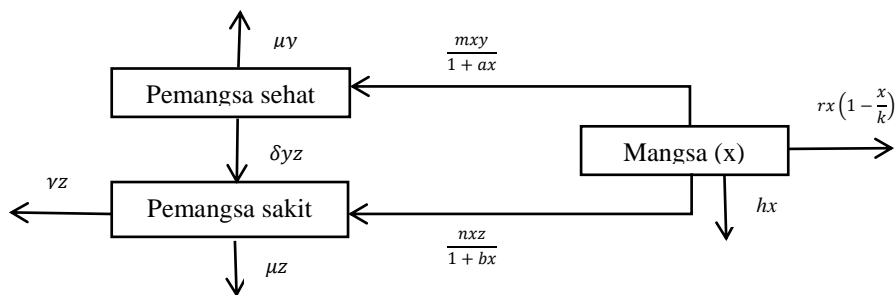
3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II, Infeksi pada Pemangsa dan Pemanenan pada Mangsa

Dalam pembentukan model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa asumsi sebagai berikut:

1. Terdapat tiga subpopulasi yaitu mangsa, pemangsa sehat dan pemangsa sakit.
2. Penyakit hanya menyebar pada populasi pemangsa.
3. Dalam keadaan tanpa pemangsa populasi mangsa tumbuh secara logistik.
4. Mangsa memiliki makanan yang cukup.
5. Mangsa merupakan makanan utama bagi pemangsa.
6. Fungsi pemangsaan menggunakan fungsi respon Holling Tipe II.
7. Mangsa memiliki nilai ekonomis sehingga dapat dipanen.

Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh konstruksi diagram kompartemen seperti pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram kompartemen model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa

Daftar variabel dan parameter yang digunakan seperti dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Daftar variabel dan parameter yang digunakan dalam model

Notasi	Interpretasi
x	Jumlah mangsa
y	Jumlah pemangsa sehat
z	Jumlah pemangsa sakit
r	koefisien kelahiran mangsa
k	koefisien daya dukung lingkungan
m	laju interaksi pemangsa sehat
n	laju interaksi pemangsa sakit
a	koefisien kejenuhan pemangsa sehat
b	koefisien kejenuhan pemangsa sakit
μ	koefisien kematian alami pemangsa
d	laju infeksi
σ	laju kematian karena penyakit
h	koefisien pemanenan

Model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{1+ax} - \frac{nxz}{1+bx} - hx \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{mxy}{1+ax} - \mu y - dyz \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{nxz}{1+bx} + dyz - \mu z - \sigma z \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $r, k, m, n, a, b, \mu, d, \sigma$ dan $h \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Didefinisikan $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Titik kesetimbangan dari sistem (1) adalah solusi dari sistem (1) yang memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan dari sistem (1) ditentukan melalui persamaan berikut:

$$\begin{aligned} rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{1+ax} - \frac{nxz}{1+bx} - hx &= 0 \\ \frac{mxy}{1+ax} - \mu y - dyz &= 0 \\ \frac{nxz}{1+bx} + dyz - \mu z - \sigma z &= 0 \end{aligned}$$

Dari $rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{1+ax} - \frac{nxz}{1+bx} - hx = 0$ diperoleh $x \left[r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{1+ax} - \frac{nxz}{1+bx} - h \right] = 0$

Diperoleh $x = 0$ atau $r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{1+ax} - \frac{nxz}{1+bx} - h = 0$
 Dari $\frac{mxy}{1+ax} - \mu y - dyz = 0$ diperoleh $y \left[\frac{mx}{1+ax} - \mu - dz \right] = 0$
 Diperoleh $y = 0$ atau $\frac{mx}{1+ax} - \mu - dz = 0$.
 Dari $\frac{nxz}{1+bx} + dyz - \mu z - \sigma z = 0$ diperoleh $z \left[\frac{nx}{1+bx} + dy - \mu - \sigma \right] = 0$
 Diperoleh $z = 0$ atau $\frac{nx}{1+bx} + dy - \mu - \sigma = 0$

Dengan demikian titik kesetimbangan Sistem (1) sebagai berikut:

- i. Titik kesetimbangan kepunahan populasi $E_1(0,0,0)$.
- ii. Titik kesetimbangan mangsa eksis $E_2 \left(\frac{k(r-h)}{h}, 0, 0 \right)$ dengan $r > h$.
- iii. Titik kesetimbangan kepunahan pemangsa sehat
 $E_3 \left(\frac{\mu+\sigma}{n-b(\mu+\sigma)}, 0, \frac{k(b(\mu+\sigma)-n)(h-r)-r(\mu+\sigma)}{k(n-b(\mu+\sigma))^2} \right)$ dengan $n > b(\mu + \sigma)$ dan $h < r$.
- iv. Titik kesetimbangan kepunahan pemangsa sakit
 $E_4 \left(\frac{\mu}{m-a\mu}, \frac{k(r-h)(m-a\mu)-r\mu}{k(a\mu-m)^2}, 0 \right)$ dengan $m > a\mu$ dan $h < r$.
- v. Titik kesetimbangan populasi eksis $E_5 \left(x^*, \frac{1}{d} \left(\mu + \sigma - \frac{nx^*}{1+bx^*} \right), \frac{1}{d} \left(\frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu \right) \right)$ dengan x^* adalah akar positif dari persamaan $abdrx^3 + [abdhk + adr + bdr - abdkr]x^2 + [dr + bkm\mu + bkm\sigma + akn\mu + adhk + bdhk - adkr - bdkr - akn\mu]x + [km(\mu + \sigma) + dhk - dkr - kn\mu] = 0$ dengan $\sigma > \frac{nx^*}{1+bx^*}$ dan $\frac{mx^*}{1+ax^*} > \mu$.

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model

Selanjutnya akan dipelajari dinamika di sekitar titik-titik kesetimbangan sistem (1). Untuk mengidentifikasi kestabilan lokal dari titik kesetimbangan, dilakukan pelinearannya terhadap model (1). Hasil pelinearannya memberikan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \frac{my}{(1+ax)^2} - \frac{nz}{(1+bx)^2} - h & -\frac{mx}{1+ax} & -\frac{nx}{1+bx} \\ \frac{my}{(1+ax)^2} & \frac{mx}{1+ax} - \mu - dz & -dy \\ \frac{nz}{(1+bx)^2} & dz & \frac{nx}{1+bx} + dy - \mu - \sigma \end{bmatrix}$$

Substitusi titik kesetimbangan E_1 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \sigma) \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -\mu$ dan $\lambda_3 = -(\mu + \sigma)$. Karena terdapat nilai eigen $\lambda_1 = r > 0$ maka titik kesetimbangan E_1 tidak stabil.

Substitusi titik kesetimbangan E_2 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} h - r & -\frac{mk(r-h)}{r+ak(r-h)} & -\frac{nk(r-h)}{r+bk(r-h)} \\ 0 & \frac{mk(r-h)}{r+ak(r-h)} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{nk(r-h)}{r+bk(r-h)} - \mu - \sigma \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = h - r$, $\lambda_2 = \frac{mk(r-h)}{r+ak(r-h)} - \mu$ dan $\lambda_3 = \frac{nk(r-h)}{r+bk(r-h)} - \mu - \sigma$. Dengan demikian titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik lokal jika $\frac{mk(r-h)}{r+ak(r-h)} < \mu$ dan $\frac{nk(r-h)}{r+bk(r-h)} < \mu + \sigma$.

Substitusi titik kesetimbangan $E_3(x^*, 0, z^*)$ dengan $x^* = \frac{\mu + \sigma}{n - b(\mu + \sigma)}$ dan $z^* = \frac{k(b(\mu + \sigma) - n)(h - r) - r(\mu + \sigma)}{k(n - b(\mu + \sigma))^2}$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_3} = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} - h & -\frac{mx^*}{1+ax^*} & -\frac{nx^*}{1+bx^*} \\ 0 & \frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu - dz^* & 0 \\ \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} & dz^* & \frac{nx^*}{1+bx^*} - \mu - \sigma \end{bmatrix}.$$

Dari J_{E_3} diperoleh persamaan karakteristik $(\lambda - B) \left[\lambda^2 - (A + C)\lambda + \left(AC + \frac{nx^*z^*}{(1+bx^*)^3} \right) \right] = 0$ dengan $A = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} - h$, $B = \frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu - dz^*$ dan $C = \frac{nx^*}{1+bx^*} - \mu - \sigma$. Dengan demikian diperoleh $\lambda = B$ atau $\lambda^2 - (A + C)\lambda + \left(AC + \frac{nx^*z^*}{(1+bx^*)^3} \right) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik lokal jika $B < 0$, $A < -C$, dan $AC > \frac{nx^*z^*}{(1+bx^*)^3}$.

Substitusi titik kesetimbangan $E_4(x^*, y^*, 0)$ dengan $x^* = \frac{\mu}{m + a\mu}$ dan $y^* = \frac{k(r-h)(m-a\mu) - r\mu}{k(a\mu - m)^2}$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_4} = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} - h & -\frac{mx^*}{1+ax^*} & -\frac{nx^*}{1+bx^*} \\ \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} & \frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu & -dy^* \\ 0 & 0 & \frac{nx^*}{1+bx^*} + dy^* - \mu - \sigma \end{bmatrix}.$$

Dari J_{E_4} diperoleh persamaan karakteristik $(\lambda - F) \left[\lambda^2 - (D + E)\lambda + \left(DE + \frac{mx^*y^*}{(1+ax^*)^3} \right) \right] = 0$ dengan $D = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} - h$, $E = \frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu$ dan $F = \frac{nx^*}{1+bx^*} + dy^* - \mu - \sigma$. Sehingga diperoleh $\lambda = F$ atau $\lambda^2 - (D + E)\lambda + \left(DE + \frac{mx^*y^*}{(1+ax^*)^3} \right) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_4 stabil asimtotik lokal jika $F < 0$, $D < -E$, dan $DE > \frac{mx^*y^*}{(1+ax^*)^3}$.

Substitusi titik kesetimbangan E_5 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_{E_5} = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} - \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} - h & -\frac{mx^*}{1+ax^*} & -\frac{nx^*}{1+bx^*} \\ \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} & \frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu - dz^* & -dy^* \\ \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} & dz^* & \frac{nx^*}{1+bx^*} + dy^* - \mu - \sigma \end{bmatrix}.$$

Dari matriks J_{E_5} diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_5 stabil asimtotik lokal jika $P < 0$, $R > 0$ dan $\frac{R-PQ}{P} > 0$ dengan

$$P = -(H_{11} + H_{12} + H_{13}),$$

$$Q = H_{11}H_{22} + H_{11}H_{33} + H_{22}H_{33} + H_{13}H_{31} - H_{23}H_{32} - H_{12}H_{21} + H_{12}H_{21}H_{33},$$

$$R = H_{11}H_{22}H_{33} + H_{12}H_{23}H_{31} + H_{13}H_{21}H_{32} + H_{11}H_{23}H_{32} - H_{13}H_{22}H_{31},$$

$$H_{11} = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} - \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2} - h, J_{12} = -\frac{mx^*}{1+ax^*}, J_{13} = -\frac{nx^*}{1+bx^*}, J_{21} = \frac{my}{(1+ax^*)^2}, J_{22} =$$

$$\frac{mx^*}{1+ax^*} - \mu - dz^*, J_{23} = -dy^*, J_{31} = \frac{nz^*}{(1+bx^*)^2}, J_{32} = dz^*, J_{33} = \frac{nx^*}{1+bx^*} + dy^* - \mu - \sigma.$$

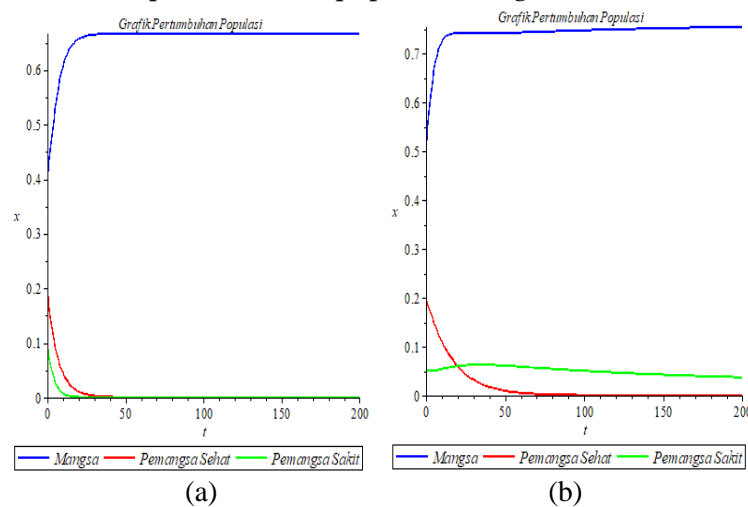
3.4 Interpretasi Model

Untuk memperkuat hasil analisis yang telah diperoleh maka dilakukan simulasi numerik terhadap model (1). Karena keterbatasan data yang ada, pemilihan parameter disesuaikan dengan kondisi kestabilan yang diberikan pada hasil sebelumnya. Simulasi hanya dilakukan pada titik kesetimbangan yang stabil yaitu E_2, E_3, E_4 dan E_5 .

Parameter yang digunakan pada simulasi E_2 yaitu $r = 0.3, m = 0.1, k = 0.8, a = 0.05, n = 0.08, b = 0.03, d = 0.05, \mu = 0.2, h = 0.05, \sigma = 0.1$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_2 (x, y, z) = (0.67, 0, 0)$.

Parameter yang digunakan pada simulasi E_3 yaitu $r = 0.3, m = 0.001, k = 0.8, a = 0.1, n = 0.2, b = 0.03, d = 0.2, \mu = 0.05, h = 0.01, \sigma = 0.1$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_3 (x, y, z) = (0.77, 0, 0.01)$.

Diperoleh Gambar 2 pertumbuhan populasi sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik pertumbuhan populasi titik kesetimbangan E_2 (a) dan E_3 (b)

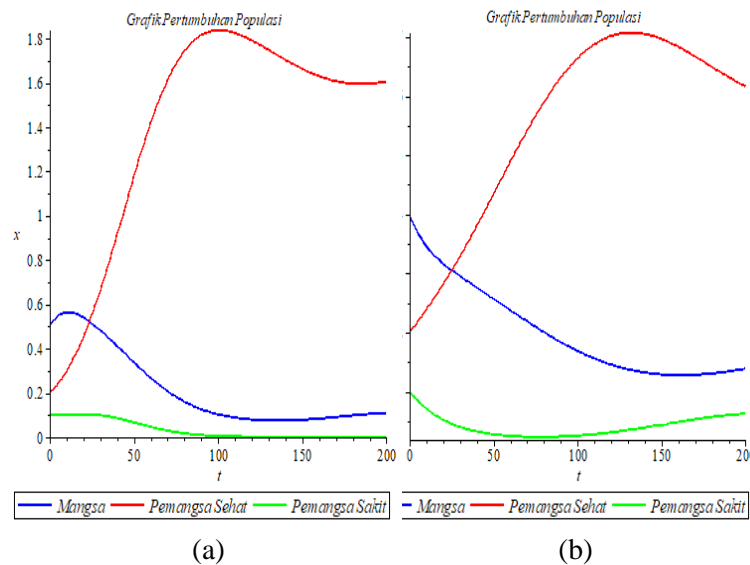
Gambar 2(a) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan populasi mangsa eksis E_2 bersifat stabil. Pada gambar tersebut memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran pada mangsa yang lebih tinggi dari pada angka pemanenan. Peningkatan jumlah mangsa ini tidak diikuti oleh bertambahnya jumlah pemangsa sehat karena adanya kematian alami dan infeksi penyakit sedangkan pada populasi pemangsa sakit terjadi kematian karena infeksi penyakit. Seiring berjalannya waktu, jumlah populasi mangsa terus meningkat dan menuju titik kesetimbangan sedangkan pemangsa mengalami kepunahan.

Gambar 2(b) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan kepunahan pemangsa sehat E_3 bersifat stabil. Pada gambar tersebut memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa mengalami peningkatan karena kelahiran pada mangsa yang lebih

tinggi dari pada angka pemanenan. Sedangkan pertumbuhan populasi pemangsa sehat mengalami penurunan akibat adanya infeksi penyakit sehingga mengakibatkan peningkatan populasi pada pemangsa sakit. Seiring berjalannya waktu jumlah populasi mangsa terus meningkat dan menuju titik kesetimbangan sedangkan pemangsa sehat mengalami penurunan karena adanya infeksi penyakit sampai menuju kepunahan. Populasi pemangsa sakit juga terus mengalami penurunan sampai pada titik kesetimbangan karena adanya kematian akibat infeksi.

Parameter yang digunakan pada simulasi E_4 yaitu $r = 0.2, m = 0.1, k = 0.8, a = 0.1, n = 0.2, b = 0.03, d = 0.01, \mu = 0.01, h = 0.01, \sigma = 0.1$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_4 (x, y, z) = (0.1, 1.7, 0)$. Parameter yang digunakan pada simulasi E_5 yaitu $r = 0.2, m = 0.1, k = 0.8, a = 0.05, n = 0.01, b = 0.01, d = 0.1, \mu = 0.01, h = 0.1, \sigma = 0.05$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_3 (x, y, z) = (0.17, 0.58, 0.06)$.

Diperoleh Gambar 3 pertumbuhan populasi sebagai berikut:



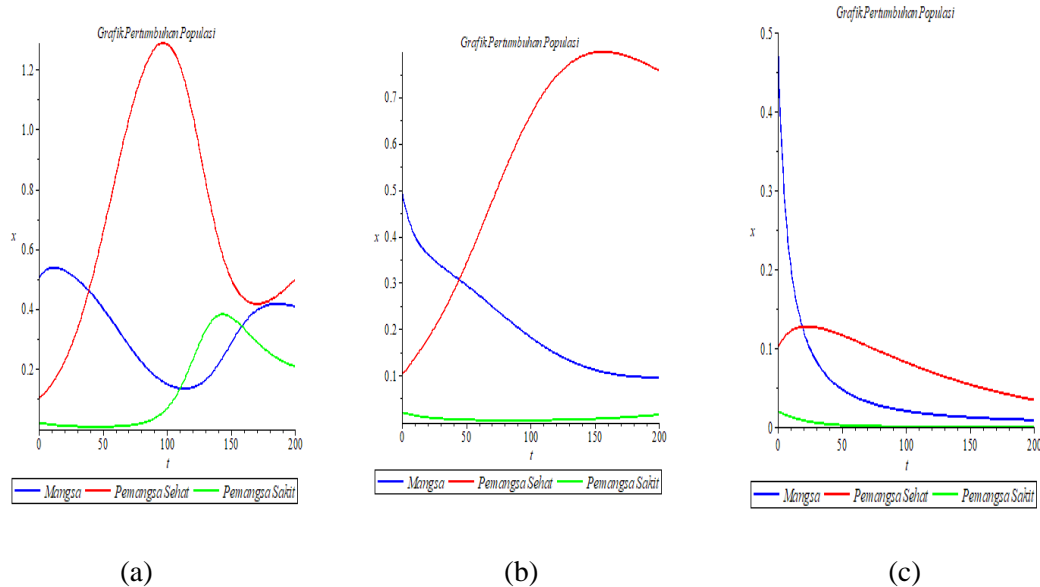
Gambar 3. Grafik pertumbuhan populasi titik kesetimbangan E_4 (a) dan E_5 (b)

Gambar 3(a) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan kepunahan pemangsa sakit E_4 bersifat stabil. Pada gambar tersebut memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa mengalami penurunan karena adanya pemanenan dan interaksi dengan pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa tersebut mengakibatkan peningkatan populasi pemangsa. Seiring berjalannya waktu, jumlah populasi mangsa terus mengalami penurunan dan menuju titik kesetimbangan. Penurunan populasi mangsa ini diikuti oleh penurunan jumlah populasi pemangsa sehat sampai menuju titik kesetimbangannya. Sedangkan pemangsa sakit terus mengalami penurunan sampai menuju kepunahan akibat berkurangnya jumlah infeksi.

Gambar 3(b) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan populasi eksis E_5 bersifat stabil. Pada gambar tersebut memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa mengalami penurunan karena adanya pemanenan dan interaksi dengan pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa tersebut mengakibatkan peningkatan populasi pemangsa sehat sedangkan pemangsa sakit mengalami penurunan karena meningkatnya jumlah kematian akibat infeksi. Seiring berjalannya waktu, jumlah populasi mangsa terus

mengalami penurunan dan menuju titik kesetimbangan. Penurunan populasi mangsa ini diikuti oleh penurunan jumlah populasi pemangsa sehat sampai menuju titik kesetimbangannya. Sedangkan pemangsa sakit mengalami peningkatan sampai menuju titik kesetimbangan karena meningkatnya jumlah yang terinfeksi.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan laju pemanenan sebagai kontrol. Dalam hal ini dilakukan simulasi dengan tiga nilai koefisien pemanenan (h) yang berbeda, yaitu $h = 0.05$, $h = 0.1$ dan $h = 0.2$. Simulasi untuk masing-masing laju pemanenan diberikan dalam Gambar 4 berikut:



Gambar 4. Grafik pertumbuhan populasi dengan $h = 0.05$ (a), $h = 0.1$ (b) dan $h = 0.2$ (c)

Grafik pertumbuhan populasi memperlihatkan bahwa pada saat koefisien pemanenan lebih kecil ($h = 0.05$) seperti pada Gambar 3(a) menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi mangsa awalnya meningkat, namun seiring berjalannya waktu mengalami penurunan akibat pemangsaan oleh pemangsa dan adanya pemanenan. Seiring berjalannya waktu, jumlah populasi mangsa maupun pemangsa terus mengalami perubahan sampai pada menuju titik tertentu. Sedangkan pada saat koefisien pemanenan diperbesar ($h = 0.2$) seperti pada Gambar 3(c) menunjukkan bahwa jumlah populasi mangsa mengalami penurunan secara cepat akibat pemangsaan dan pemanenan. Berkurangnya populasi mangsa ini diikuti oleh menurunnya populasi pemangsa. Seiring berjalannya waktu, tingginya pemanenan mengakibatkan populasi mangsa terus berkurang hampir menuju kepunahan yang diikuti oleh berkurangnya populasi pemangsa.

Dari Gambar 3 tersebut dapat dijelaskan bahwa koefisien pemanenan yang diperkecil mengakibatkan jumlah populasi mangsa mengalami penurunan namun pada saat waktu tertentu masih bisa mengalami peningkatan. Seiring berjalannya waktu jumlah populasi mangsa terus mengalami perubahan sampai menuju titik tertentu. Perubahan (fluktuasi) jumlah populasi mangsa ini diikuti oleh perubahan jumlah populasi pemangsa. Sedangkan koefisien pemanenan yang diperbesar akan mengakibatkan jumlah populasi mangsa terus mengalami penurunan secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan seiring berjalannya waktu. Semakin berkurangnya

populasi mangsa ini mengakibatkan populasi pemangsa juga semakin berkurang secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan.

4. Kesimpulan

Formulasi model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada pemangsa dan pemanenan pada mangsa seperti ditunjukkan pada sistem (1). Dari sistem tersebut diperoleh lima titik kesetimbangan yaitu kepunahan populasi, mangsa eksis, kepunahan pemangsa sehat, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa kepunahan populasi tidak mungkin terjadi sedangkan mangsa eksis, kepunahan pemangsa sehat, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis masih memungkinkan terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan diperoleh interpretasi bahwa laju pemanenan yang diperbesar mengakibatkan jumlah populasi mangsa terus mengalami penurunan secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan seiring berjalannya waktu. Semakin berkurangnya populasi mangsa ini mengakibatkan populasi pemangsa juga semakin berkurang secara signifikan dan hampir mengalami kepunahan.

Daftar Pustaka

- [1] P. Panja, S.K. Mondal and J. Chattopadhyay, "Dynamical Effects of Anti-Pemangsa Behaviour of Adult Mangsa in a Pemangsa-Mangsa Model with Ratio-Dependent Functional Response", *Asian Journal of Mathematics and Physics*, vol.1, pp. 19–32, 2017.
- [2] S. G. Mortoja, P. Panja and S.K. Mondal, "Dynamics of a Pemangsa-Mangsa Model with Stage Structure on Both Species and Anti-Pemangsa Behavior", *Informatics in Medicine Unlocked*, vol.10, pp. 50–57, 2018.
- [3] G. T. Skalski and J. F. Gilliam, "Functional Respon with Pemangsa Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model", *Ecology*, vol. 82, pp. 3083–3092, 2001.
- [4] G.P.D. Murray, et al, "Experimental Predictions of The Functional Response of A Freshwater Fish", *Ethology*, vol. 119, pp. 751-761, 2013.
- [5] A.S. Idrus, A.P. Gani and N. Zaid, "Analisis Dinamik Model Pemangsa-Mangsa dengan Struktur Usia dan Perilaku Anti-Pemangsa", *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, vol. 1, no. 2, pp. 22–29, 2022.
- [6] A.P. Sari dan S. B. Waluya, "Analisis Model Pemangsa-Mangsa dengan Protection Zone Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe II", *Prisma*, vol. 4, pp. 736-742, 2021.
- [7] S. Maisaroh, Resmawan dan E. Rahmi, "Analisis Kestabilan Model Pemangsa-Mangsa dengan Infeksi Penyakit pada Mangsa dan Pemanenan Proporsional pada Pemangsa", *Jambura J. Biomath.* vol. 1, pp. 8-15, 2020.
- [8] N. Hasan , Resmawan, E. Rahmi, "Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Pemangsa", *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi*, vol. 16, no. 2, pp. 121-142, 2020.
- [9] Mu'tamara, et al, "Vaksinasi dan Treatment pada Pemangsa-Mangsa dengan Dua Jenis Pemangsa yang Salah Satunya Terinfeksi", *Eksakta*, vol. 19, No. 02, pp.128-142.

- 2019.
- [10] S.H. Arsyad, et al, "Analisis Model Pemangsa Mangsa Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada Pemangsa", *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 1-16, 2020.
 - [11] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, New- York, USA, 1990.
 - [12] L. Perko, *Differential Equation and Dynamical System*, New York, SpringerVerlag Berlin Heidelberg, 1991.
 - [13] F. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, 2020.