Alternatif Menentukan Koefisien Trinomial dengan Perkalian Model Anak Tangga dan Modifikasi Perkalian Bersusun

Jufri[1], Sri Gemawati[2], M.D.H Gamal[3]
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: jufrirokan@gmail.com

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang alternatif menentukan koefisien trinomial. Koefisien trinomial ditentukan dengan cara perkalian dengan model anak tangga dan modifikasi perkalian bersusun. Perkalian model anak tangga dilakukan dengan memfaktorkan bentuk trinomial, kemudian memilih salah satu faktor sebagai anak tangga dan faktor yang lain sebagai pengguna tangga. Modifikasi perkalian bersusun dilakukan dengan menyisipkan nol diantara koefisien-koefisien trinomial pangkat $n-1$. Dari dua alternatif yang diberikan, metode modifikasi perkalian bersusun lebih mudah dilakukan dan lebih efisien.

Kata Kunci: anak tangga, koefisien, perkalian bersusun, trinomial

ABSTRACT

This article discusses the altenative to determine the coefficient trinomial. Trinomial coefficients are determined by multiplication tiered with the stairs model and modifications of multiplication tiered. Multiplicative stairs model is done by factoring the trinomial form, then choosing one factor as staircases and other factors as stairs stairs. Modification the multiplication tiered is done by inserting a zero between trinomial coefficients with order $n-1$. Of the two alternatives given, methods of multiplication is easier and more efficient.

Keyword:*coefficients, multiplication tiered, stairs, trinomial*

PENDAHULUAN

Dari kaidah penjumlahan dan kaidah perkalian muncullah teori tentang permutasi dan kombinasi yang di dalamnya membahas koefisien binomial yang dilambangkan dengan $\binom{n}{r}$. Bentuk $\binom{n}{r}$ dapat dipandang sebagai, banyak cara membuat himpunan bagian dengan *r* elemen dari suatu himpunan dengan *n* elemen. Sedangkan secara aljabar, koefisien binomial merupakan koefisien suku $x^{n-r}y^r$ pada ekspansi $(x+y)^n$ untuk *n* dan *r* adalah bilangan cacah .

Segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang disusun dalam bentuk segitiga [5]. Bentuk susunan koefisien binomial pada segitiga ini muncul dalam tulisan Blaise Pascal yang berjudul *Traite du triangle arithmetique* [5]. Selain membantu dalam ekspansi aljabar, aplikasi dari koefisien binomial banyak diterapkan dalam berbagai bidang seperti statistika dan kombinatorik.

Jemes [1] menuliskan bentuk umum trinomial sebagai.

$$(a+b+c)^p = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{m}\binom{p}{m}\binom{m}{n}a^{p-m}b^n c^{m-n} \tag{1}$$

Dengan menerapkan rumus koefisien multinomial, maka dapat diperoleh koefisien trinomial sebagai.

$$\binom{p}{k_1,k_2,k_3} = \frac{p!}{k_1!k_2!k_3!} \tag{2}$$

Koefisien trinomial adalah koefisien yang diperoleh dari ekspansi bentuk $(a+b+c)^n$. Michael [2] melakukan perkalian dengan membalik posisi salah satu faktor $(x+y)^n$ untuk menentukan koefisien binomial, kemudian digeneralisasi untuk 3-Triangle dan 4-Triangle. Koefisien trinomial dapat dikonstruksi menjadi segitiga-segitiga yang mewakili koefisien$(a+b+c)^n$ [4]. Selanjutnya koefisien trinomial $(a+b+c)^n$ dikonstruksi pada sebuah limas Pascals yang berlapis-lapis [3]. Lapisan pada limas Pascal berbentuk segitiga yang di dalamnya berisi koefisien trinomial pangkat *n*. Misalkan lapisan ke 5 dari limas Pascal, berarti lapisan tersebut merupakan lapisan yang memuat koefisien $(a+b+c)^5$.Metode lain untuk menentukan koefisien trinomial adalah dengan mengalikan koefisien $(x+y)^n$ dengan segitiga Pascal binomial pangkat *n* [2]. Misalnya ingin menentukan koefisien $(a+b+c)^3$, maka dilakukan perkalian koefisien $(a+b)^3$ dengan segitiga Pascal binomial *n* = 3 sebagai berikut.

Koefisien $(a+b)^3$	**Segitiga pascal $n=3$**	$(a+b+c)^3$
1	(1)	(1)

$\mathbf{3}$	$\times$	$(\mathbf{1}+\mathbf{1})$	$=$	$(\mathbf{3}+\mathbf{3})$
$\mathbf{3}$		$(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{1})$		$(\mathbf{3}+\mathbf{6}+\mathbf{3})$
$\mathbf{1}$		$(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{1})$		$(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{1})$

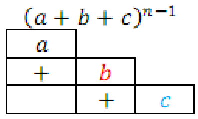
Dari metode-metode untuk menentukan koefisien trinomial yang telah dituliskan oleh Michael [2], Oscar [4], dan Miller [3]. Pada bagian selanjutnya akan diberikan alternatif menentukan koefisien trinomial dengan perkalian model anak tangga dan modifikasi perkalian bersusun. Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya metode dalam menentukan koefisien trinomial, sehingga dapat mempermudah dalam menentukan koefisien trinomial dan dapat digunakan dalam pembelajaran.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Alternatif Menentukan Koefisien Trinomial Dengan Modifikasi Perkalian Bersusun

Metode perkalian anak tangga dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut

1. Tulis $(a+b+c)^n = (a+b+c)(a+b+c)^{n-1}$. Tetapkan $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $(a+b+$ $cn-1$ sebagai objek yang menggunakan tangga sebagai mana Gambar 1.

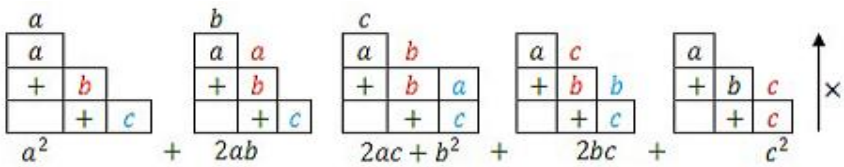


Gambar 1. Suku-suku $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $(a+b+c)^{n-1}$ sebagai pengguna tangga

2. Suku-suku $(a+b+c)^{n-1}$ berjalan pada anak tangga dari atas ke bawah dengan berjalan maju. Artinya suku yang berjalan terlebih dahulu adalah suku pertama, diikuti oleh suku ke dua, suku ke tiga dan seterusnya.
3. Melangkahlah maju, kalikan suku-suku $(a+b+c)^{n-1}$ dengan anak tangga tempat posisi berada. Misalnya suku pertama $(a+b+c)^{n-1}$ adalah a berada pada anak tangga b, maka suku pertama tersebut dikalikan dengan b yaitu $a \times b = ab$. Kemudian lakukan penjumlahan biasa.

Berikut ini diberikan beberapa contoh menentukan koefisien trinomial dengan perkalian model anak tangga.

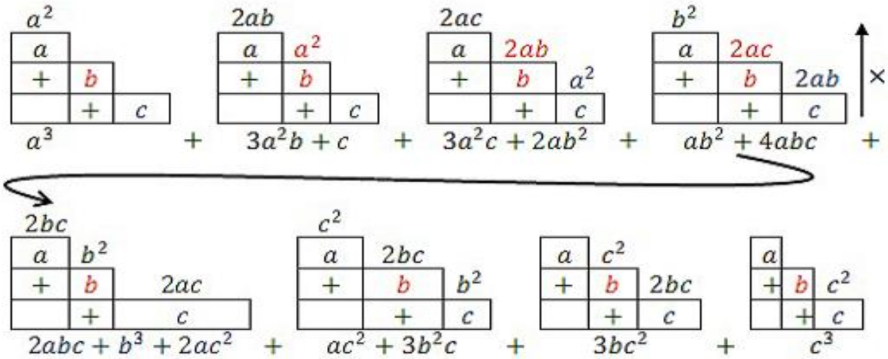
Contoh 1. Diberikan $(a+b+c)^2$, akan ditentukan koefisien $(a+b+c)^2$ dengan cara perkalian model anak tangga. Tulis $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$. Tetapkan $(a+b+c)$ yang pertama sebagai anak tangga dan $(a+b+$ c yang kedua sebagai pengguna tangga. Variabel a, b, c pada $a+b+c$ yang kedua diurutkan sebagai suku pertama adalah a, suku kedua adalah b dan suku ketiga adalah c. Mulai menuruni tangga dari a diikuti b dan c. Kalikan a, b, c dengan anak tangga tempat a, b, c berada, yaitu $(a \times a)$, $(b \times a)$, $(a \times b)$, ..., $(c \times c)$. Ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Menentukan koefisien $(a+b+c)^2$ dengan perkalian model anak tangga

Dari Gambar 2 diperoleh $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ dengan koefisiennya adalah 1, 2, 2, 1, 2, 1.

Contoh 2. Dengan memanfaatkan hasil pada contoh 1, akan ditentukan koefisien $(a+b+c)^3$ dengan menggunakan perkalian model anak tangga. Tetapkan $(a+b+c)$ sebagai anak tangga dan $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ sebagai pengguna tangga. Dengan menerapkan langkah-langkah perkalian model anak tangga, ilustrasi ekspansi $(a+b+c)^3$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Menentukan koefisien $(a + b + c)^3$ dengan perkalian model anak tangga

Dari Gambar 3 diperoleh $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$ dengan koefisien 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 3, 3, 1.

2. Alternatif Menentukan Koefisien Trinomial Dengan Modifikasi Perkalian Bersusun

Pada metode ini, diberikan suatu metode dengan memodifikasi perkalian bersusun untuk koefisien trinomial. Untuk menentukan koefisien trinomial dengan modifikasi perkalian bersusun dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tulis $(a + b + c)^n = (a + b + c)(a + b + c)^{n-1}$. Susun koefisien $(a + b + c)^{n-1}$ sebanyak tiga kali dalam tiga baris. Baris pertama dituliskan dengan menyisipkan nol di antara koefisien pertama dan ke dua. Kemudian lompat dua koefisien dan sisipkan nol. Selanjutnya lompat tiga koefisien dan sisipkan nol dan seterusnya.
2. Pada baris kedua lakukan mengikuti aturan pada baris pertama dengan menuliskan koefisien pertama di bawah baris pertama menjorok satu posisi ke kiri.
3. Pada baris ke tiga susun koefisien-koefsien $(a + b + c)^{n-1}$ di bawah baris kedua dengan ketentuan suku pertama diletakkan menjorok ke kiri satu posisi mengikuti baris kedua tanpa sisipan nol. Kemudian lakukan penjumlahan biasa.

Contoh 3 dan 4 merupakan penerapan dari modifikasi perkalian bersusun.

Contoh 3. Diberikan $(a + b + c)^2$, akan ditentukan koefisien $(a + b + c)^2$ dengan modifikasi perkalian bersusun. Pilih salah satu faktor $(a + b + c)^2$, yaitu $(a + b + c)$. Koefisien dari $(a + b + c)$ adalah 1, 1, 1. Tulis 1, 1, 1 sebanyak tiga kali dalam tiga baris dengan ketentuan sisipkan nol antara koefisien pertama dan kedua. Pada baris kedua, tulis koefisien pertama menjorok ke kiri satu posisi dari koefisien pertama pada baris pertama. Sisipkan nol antara koefisien pertama dan ke dua. Tulis 1, 1, 1 pada baris ketiga menjorok ke kiri satu posisi dibawah baris kedua tanpa menyisipkan nol. Lakukan penjumkahan biasa. Ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 4.

		1	0	1	1	
	1	0	1	1		
1	1	1				+
1	2	2	1	2	1	

Gambar 4. Menentukan koefisien $(a + b + c)^2$ dengan modifikasi perkalian bersusun

Jadi diperolah koefisien $(a + b + c)^2$ adalah 1, 2, 2, 1, 2, 1.

Contoh 4. Akan ditentukan koefisien $(a + b + c)^3$ dan $(a + b + c)^4$ menggunakan modifikasi perkalian bersusun. Dengan memanfaatkan koefisien $(a + b + c)^2$ pada contoh 3. Koefisien $(a + b + c)^3$ diperoleh sebagai Gambar 5.

		1	0	2	2	0	1	2	1	
	1	0	2	2	0	1	2	1		
1	2	2	1	2	1					+
1	3	3	3	6	3	1	3	3	1	

Gambar 5. Menentukan koefisien $(a + b + c)^3$ dengan modifikasi perkalian bersusun

Sehingga diperoleh koefisien $(a + b + c)^3$ adalah 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 3, 1. Dengan menggunakan koefisien $(a + b + c)^3$ dapat pula ditentukan koefisien $(a + b + c)^4$ dengan modifikasi perkalian bersusun. Ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 6.

		1	0	3	3	0	3	6	3	0	1	3	3	1	
	1	0	3	3	0	3	6	3	0	1	3	3	1		
1	3	3	3	6	3	1	3	3	1						+
1	4	4	6	12	6	4	12	12	4	1	4	6	4	1	

Gambar 6. Menentukan koefisien $(a+b+c)^4$ dengan modifikasi perkalian bersusun

Diperoleh koefisien $(a+b+c)^4$ adalah 1, 4, 4, 6, 12, 6, 4, 12, 12, 4, 1, 4, 6, 4, 1.

KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas dua alternatif menentukan koefisien trinomial. Alternatif yang berikan yaitu metode perkalian model anak tangga dan modifikasi perkalian bersusun. Perkalian model anak tangga dilakukan dengan memfaktorkan bentuk trinomial, kemudian menentapkan salah satu faktor sebagai anak tangga dan faktor yang lain sebagai pengguna tangga. Modifikasi perkalian bersusun dilakukan dengan menyisipkan nol diantara koefisien-koefisien trinomial pangkat $n-1$. Dari dua alternatif yang diberikan, metode modifikasi perkalian bersusun lebih mudah dilakukan dan lebih efisien. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari alternatif-alternatif lain untuk menentukan koefisien trinomial dan pengembangan serta aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] James, C., The Trinomial Triangle, *The College Mathematics Journal*, 30(2), 1999, pp. 141-142.
[2] Michael, A. K., Generalization's of Pascal's Triangle: A Construction Based Approach, Thesis, Department of Mathematical Sciences, College of Sciences The Graduate College, University of Nevada, Las Vegas, 2011.
[3] Miller, S., Recursions Associated With Pascal's Pyramid. University Oklahoma. *PI MU EPSILON*, *Journal*, 4(10), 1969, pp. 417-422.
[4] Oscar, W., Proof and Applications of the Multinomial Theorem and its Relationship with Combinatorics, *Extended Essay- Mathematics*, Chinese International School, 2011.
[5] Trisna, S, U., Perluasan Segitiga Pascal. *Makalah PPPPTK Matematika*, Yogyakarta, 2011.