Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. I, No. 1, Januari 2015
ISSN 2460 - 4542

Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular Dengan Metode Leverrier Faddeev

Suhendry[1], Irma Suryani[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: Suhendryrazak@gmail.com, irmayath@yahoo.co.id

ABSTRAK

Ada beberapa metode untuk mencari invers Drazin dari matriks singular, salah satunya adalah metode Leverrier Faddeev. Pada makalah ini akan dibahas bagaimana menentukan invers Drazin dari matriks singular menggunakan metode Levverrier Faddeev. Metode Levverrier Faddeev merupakan metode yang digunakan untuk menentukan invers suatu matriks singular maupun non singular dengan cara menyederhanakan perhitungan koefesien polinomial karakteristik dari suatu matriks. Berdasarkan pembahasan tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa matriks singular juga mempunyai invers sama seperti matriks non singular.
Katakunci: *Invers Drazin, Levverrier Faddeev.*

ABSTRACT

There are a few method for drazin Invere search of the singular matrix, one of them are leverrier faddeev method. This .paper discussion how to determine drazin Inverse of matrix singular use leverrier faddeev method, Leverrier Faddeev method constitute the method that is used to determine inverse of the singular matrix devel non singular by the way simplify computation of characteristic polynomial koefesien of a matrix. Based on the delibirations of the final project inconclusive that singular matrix have inverse same as non singular matrix.
Keywords: *Drazin Inverse, Leverrier Faddeev.*

PENDAHULUAN

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu yang membahas permasalahan pada bidang matematika, salah satunya adalah matriks. Matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang. Penyusunan bilangan-bilangan atau yang biasa disebut elemen-elemen dalam bentuk empat persegi panjang biasanya secara horizontal dan vertikal. Susunan bilangan-bilangan horizontal disebut baris dan susunan bilangan-bilangan vertikal disebut kolom dari suatu matriks, banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks disebut ukuran matriks.

Matriks dengan ukuran $n \times n$ dikatakan mempunyai invers apabila matriks tersebut marupakan matriks nonsingular, atau dengan kata lain matriks tersebut memiliki determinan. Tetapi lain halnya dengan matriks singular yang membutuhkan sebuah invers matriks yang diperumum untuk mengetahui inversnya, dikarenakan determinan matriks tersebut adalah nol, dan invers matriks tersebut adalah invers Drazin.

Invers Drazin merupakan suatu invers yang khusus digunakan untuk matriks singular yang dilambangkan dengan A^D**.** Metode yang bisa digunakan untuk mencari invers Drazin beragam, seperti penelitian yang dilakukan oleh Lisnilwatil Khasanah dan Bambang Irawanto melalui jurnal yang berjudul ”*Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular”* tahun 2011 menggunakan metode bentuk kanonik jordan, tetapi masih ada metode lain yang bisa digunakan untuk menentukan invers Drazin, salah satunya adalah metode Leverrier Faddeev. Metode ini merupakan metode yang dimodifikasi khusus dari metode Leverrier oleh Faddeev untuk menentukan invers Drazin dengan cara menyederhanakan perhitungan koefesien polinomial karakteristik dari suatu matriks.

METODE PENELITIAN

Trace Matriks

Trace matriks adalah jumlah elemen diagonal utama pada matriks bujur sangkar. Jika matriks A adalah matriks bujur sangkar (kuadrat) ukuran $n \times n,$ maka *trace* A dinyatakan oleh $tr(A)$.
Jika diketahui matriks A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

Sehingga *trace* suatu matriks bujur sangkar adalah penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama dari matriks yang bersangkutan.

Contoh :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan $Trace$ dari matriks (A)?

Penyelesaian:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 1 + 5 - 2 = 4$$

Matriks Singular

Jika A adalah matriks persegi dan $det(A) = 0$, maka A merupakan matriks singular atau non invertibel (tidak bisa dibalik).

Contoh :

Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Kemudian dicari determinannya$|S| = 2.3 - \big((-3).(-2)\big) = 6 - 6 = 0$

Karena determinan dari matriks tersebut adalah 0 maka matriks tersebut singular.

Invers Drazin

Michael P Drazin diketahui sebagai seseorang yang pertama kali memperkenalkan Invers Drazin pada tahun 1958 dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 1 (M. Catral, D.D Olesky and P.Van Den Drieesche, 2009): Jika A matriks $n \times n$ suatu bilangan riil atau bilangan kompleks maka indeks A merupakan bilangan q sehingga $rank\ A^{q+1} = rank\ A^{q}$. Maka Invers Drazin dari suatu matriks A yang dituliskan dengan A^D merupakan sebuah invers yang memenuhi:

1. $AA^D = A^D A$
2. $A^D A A^D = A^D$
3. $A^{q+1} A^D = A^q$

dimana $q = ind(A)$.

Metode Leverrier Faddeev

Metode leverrier faddeev merupakan salah satu metode yang juga dapat digunakan untuk mencari suatu invers Drazin, selain dari metode bentuk kanonik Jordan. Penjelasan mengenai metode ini akan ditunjukkan dengan menggunakan matriks polinomial$A(S) \in \mathrm{C}(s)^{n \times n}$ dan dapat dilihat pada lemma dibawah ini:

Lemma Diberikan sebarang matriks polinomial$A(s)$ dan akan ditunjukkan bahwa:

$a(z,s)$ =det$[zI_n - A(s)]$

$= a_0(s)z^n + a_1(s)z^{n-1} + \cdots a_{n-1}(s)z + a_n(s)$

$a_0(s) = 1, z \in \mathrm{C}$.

Bukti:

Diberikan matriks $A(s) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Kemudian akan menentukan $a_0(s) = 1$

Penyelesaian:

$$a(z,s) = det[zI_n - A(s)]$$

$$= det\begin{bmatrix} z-a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & z-a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & z-a_{ii} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & z-a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= ((z-a_{11})(z-a_{22})\cdots(z-a_{ii})\cdots(z-a_{nn}))$$

$$= (z^2 - za_{22} - za_{11} + a_{11}a_{22})\cdots\cdots\cdots\cdots(z-a_{nn})$$

$$= z^n + a(s)z^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n(s)$$

Terbukti bahwa $a_0 = 1$. ∎

Sebelum mencari invers Drazin, terlebih dahulu mengetahui nilai k, yang mana nilai k didapat dari koefisen matriks, yang mana:
Jika$a_n = 0$, maka $a_{t+1} = 0$ dan $a_t \neq 0$
Dan juga diasumsikan

$$B_n(s) \equiv 0 \quad B_r(s) \equiv 0 \qquad Br-1(s) = 0$$

Dengan $k = r - t$
Dari kasus $s \in \mathrm{C}$ $k > 0$, invers Drazin untuk $A(s)$ diberikan dalam bentuk

$$A(s)^D = (-1)^{k+1}a_t(s)^{-k-1}A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$$

Kemudian untuk kasus $s \in \mathrm{C}$ dan $k = 0$ maka $A(s)^D = A(s)^{-1}$
Diasumsikan $A(s) \in \mathrm{C}(s)^{n\times n}$ matriks polinomial, maka langkah untuk mencari invers Drazinnya adalah:

Langkah Pertama:
Carilah$\{A_0(s), A_1(s), \cdots A_n(s)\}\{a_0(s), a_1(s), \cdots a_n(s)\}$dan serangkaian matrikspolinomial$\{B_0(s), B_1(s), \cdots B_n(s)\}$sebagai berikut:

$$A_0(s) = 0 \qquad a_0(s) = 1 \qquad B_0(s) = I_n$$

$$A_1(s) = A(s)B_0(s) \qquad a_1(s) = -\frac{Tr(A_1(s))}{1} \qquad B_1(s) = A_1(s) + a_1(s)I_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_n(s) = A(s)B_{n-1}(s) \qquad a_n(s) = -\frac{Tr(A_n(s))}{n} B_n(s) = A_n(s) + a_n(s)I_n$$

Langkah Kedua:
Diberikan$t = max\{l: a_l(s) \neq 0\}r = min\{l: B_l = 0\}$ $k = r - t$
Untuk$s \in \mathrm{C}$ dan invers Drazinnya adalah:
$A(s)^D = (-1)^{k+1}a_t(s)^{-k-1}A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Diberikan matriks singular $8x8$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks menggunakan metode Leverrier Faddeev?
$A_0 = 0$ $\qquad a_0 = 1$ $\qquad B_0 = I_8$
maka

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_1 = -\frac{Tr(A_1)}{1} = -\frac{(1-2+0+1-3+2+0+0)}{1} = -(-1) = 1$$

Kemudian,

$$B_1 = A_1 + a_1 I_8$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_2 = A.B_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 & 3 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 16 & 6 & 1 & 2 & -8 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 11 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 9 & 0 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_2 = -\frac{Tr(A_2)}{2} = -\frac{(11+0-3+2+11+9+5+3)}{2} = -\frac{38}{2} = -19$$

Kemudian,

$$B_2 = A_2 + a_2 I_8$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 & 3 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 16 & 6 & 1 & 2 & -8 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 11 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 9 & 0 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -3 & 0 & 3 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 10 & -19 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -22 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 16 & 6 & 1 & -17 & -8 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -8 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & -10 & -8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 8 & 5 & -14 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 9 & 0 & -5 & -1 & -16 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_3 = A.B_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -3 & 0 & 3 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ 10 & -19 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -22 & -2 & 7 & 9 & -8 & 2 \\ 16 & 6 & 1 & -17 & -8 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -8 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 7 & -10 & -8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 8 & 5 & -14 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 9 & 0 & -5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 17 & 0 & -26 & -30 & 28 & -10 & -8 \\ 27 & 54 & -18 & -39 & -9 & 23 & -58 & -9 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ -15 & 28 & -13 & -1 & 9 & -12 & -54 & 5 \\ -1 & 9 & -12 & -21 & 19 & 14 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ 40 & -3 & -11 & -36 & 0 & 42 & -17 & 0 \\ -37 & 5 & 4 & 48 & 69 & 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_3 = -\frac{Tr(A_3)}{3} = -\frac{(22 + 54 - 3 - 1 + 19 - 22 - 17 + 11)}{3} = -\frac{63}{3} = -21$$

Kemudian,

$$B_3 = A_3 + a_3 I_8$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 17 & 0 & -26 & -30 & 28 & -10 & -8 \\ 27 & 54 & -18 & -39 & -9 & 23 & -58 & -9 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ -15 & 28 & -13 & -1 & 9 & -12 & -54 & 5 \\ -1 & 9 & -12 & -21 & 19 & 14 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ 40 & -3 & -11 & -36 & 0 & 42 & -17 & 0 \\ -37 & 5 & 4 & 48 & 69 & 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 17 & 0 & -26 & -30 & 28 & -10 & -8 \\ 27 & 33 & -18 & -39 & -9 & 23 & -58 & -9 \\ 5 & -9 & -24 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ -15 & 28 & -13 & -22 & 9 & -12 & -54 & 5 \\ -1 & 9 & -12 & -21 & -2 & 14 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -43 & 30 & -2 \\ 40 & -3 & -11 & -36 & 0 & 42 & -38 & 0 \\ -37 & -65 & 4 & 48 & 69 & 4 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_4 = A.B_4$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 17 & 0 & -26 & -30 & 28 & -10 & -8 \\ 27 & 33 & -18 & -39 & -9 & 23 & -58 & -9 \\ 5 & -9 & -24 & -17 & 0 & -22 & 30 & -2 \\ -15 & 28 & -13 & -22 & 9 & -12 & -54 & 5 \\ -1 & 9 & -12 & -21 & -2 & 14 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & -3 & -17 & 0 & -43 & 30 & -2 \\ 40 & -3 & -11 & -36 & 0 & 42 & -38 & 0 \\ -37 & -65 & 4 & 48 & 69 & 4 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -107 & 20 & -23 & -7 & 55 & -20 & -80 & -8 \\ -91 & -59 & -34 & 7 & 114 & -58 & -57 & 21 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -51 & -81 & -17 & -77 & 32 & -57 & 97 & -9 \\ -45 & 29 & 10 & 8 & -45 & -62 & -15 & -13 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -1 & 71 & -41 & -41 & 13 & -8 & -172 & 1 \\ 175 & 19 & 1 & -138 & -120 & 153 & -93 & -54 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_4 = -\frac{Tr(A_4)}{4} = -\frac{(-107 - 59 + 21 - 77 - 45 - 175 - 172 - 54)}{4}$$

$$= -\frac{(-668)}{4} = 167$$

kemudian,

$$B_4 = A_4 + a_4 I_8$$

$$=\begin{bmatrix} -107 & 20 & -23 & -7 & 55 & -20 & -80 & -8 \\ -91 & -59 & -34 & 7 & 114 & -58 & -57 & 21 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -51 & -81 & -17 & -77 & 32 & -57 & 97 & -9 \\ -45 & 29 & 10 & 8 & -45 & -62 & -15 & -13 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -1 & 71 & -41 & -41 & 13 & -8 & -172 & 1 \\ 175 & 19 & 1 & -138 & -120 & 153 & -93 & -54 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 167 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 167 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 20 & -23 & -7 & 55 & -20 & -80 & -8 \\ -91 & 108 & -34 & 7 & 114 & -58 & -57 & 21 \\ -81 & 32 & 188 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -51 & -81 & -17 & 90 & 32 & -57 & 97 & -9 \\ -45 & 29 & 10 & 8 & 122 & -62 & -15 & -13 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -8 & 103 & -21 \\ -1 & 71 & -41 & -41 & 13 & -8 & -5 & 1 \\ 175 & 19 & 1 & -138 & -120 & 153 & -93 & 113 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_5 = A.B_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 60 & 20 & -23 & -7 & 55 & -20 & -80 & -8 \\ -91 & 108 & -34 & 7 & 114 & -58 & -57 & 21 \\ -81 & 32 & 188 & 30 & -37 & -175 & 103 & -21 \\ -51 & -81 & -17 & 90 & 32 & -57 & 97 & -9 \\ -45 & 29 & 10 & 8 & 122 & -62 & -15 & -13 \\ -81 & 32 & 21 & 30 & -37 & -8 & 103 & -21 \\ -1 & 71 & -41 & -41 & 13 & -8 & -5 & 1 \\ 175 & 19 & 1 & -138 & -120 & 153 & -93 & 113 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 89 & -165 & -5 & 84 & 108 & -35 & 11 & 73 \\ 122 & -337 & 165 & 107 & -276 & -85 & 410 & 24 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ 92 & -13 & 48 & -11 & -60 & 16 & 232 & -42 \\ 124 & -167 & 136 & 123 & -274 & -78 & 90 & -8 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ -103 & -112 & 79 & 171 & -66 & -215 & 167 & 29 \\ 152 & 525 & -194 & -263 & -48 & 100 & -410 & 56 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_5 = -\frac{Tr(A_5)}{5} = -\frac{(89 - 337 + 98 - 11 - 274 - 8 + 167 + 56)}{5}$$
$$= -\frac{(-220)}{5} = 44$$

kemudian,

$$B_5 = A_5 + a_5 I_8$$
$$= \begin{bmatrix} 89 & -165 & -5 & 84 & 108 & -35 & 11 & 73 \\ 122 & -337 & 165 & 107 & -276 & -85 & 410 & 24 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ 92 & -13 & 48 & -11 & -60 & 16 & 232 & -42 \\ 124 & -167 & 136 & 123 & -274 & -78 & 90 & -8 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ -103 & -112 & 79 & 171 & -66 & -215 & 167 & 29 \\ 152 & 525 & -194 & -263 & -48 & 100 & -410 & 56 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 133 & -165 & -5 & 84 & 108 & -35 & 11 & 73 \\ 122 & -293 & 165 & 107 & -276 & -85 & 410 & 24 \\ -145 & -50 & 142 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ 92 & -13 & 48 & 33 & -60 & 16 & 232 & -42 \\ 124 & -167 & 136 & 123 & -230 & -78 & 90 & -8 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & 36 & 99 & -19 \\ -103 & -112 & 79 & 171 & -66 & -215 & 211 & 29 \\ 152 & 525 & -194 & -263 & -48 & 100 & -410 & 110 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_6 = A.B_5$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 133 & -165 & -5 & 84 & 108 & -35 & 11 & 73 \\ 122 & -293 & 165 & 107 & -276 & -85 & 410 & 24 \\ -145 & -50 & 142 & 175 & -66 & -8 & 99 & -19 \\ 92 & -13 & 48 & 33 & -60 & 16 & 232 & -42 \\ 124 & -167 & 136 & 123 & -230 & -78 & 90 & -8 \\ -145 & -50 & 98 & 175 & -66 & 36 & 99 & -19 \\ -103 & -112 & 79 & 171 & -66 & -215 & 211 & 29 \\ 152 & 525 & -194 & -263 & -48 & 100 & -410 & 110 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 696 & 279 & -46 & -161 & -224 & 234 & -56 & 52 \\ -64 & 910 & -159 & -32 & 192 & 95 & -224 & -64 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & 676 & -104 & -20 \\ -24 & 172 & 159 & 666 & -64 & -47 & -288 & -112 \\ -56 & 220 & -307 & -164 & 846 & 387 & -128 & 80 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & 675 & -104 & -20 \\ 58 & 15 & 33 & -73 & 64 & 59 & 694 & -55 \\ -264 & -828 & 67 & 548 & 384 & -467 & 640 & 414 \end{bmatrix}$$

diperoleh:

$$a_6 = -\frac{-Tr(A^6)}{6} = -\frac{(696 + 910 - 17 + 666 + 846 + 675 + 694 + 414)}{6}$$

$$= -\frac{4884}{6} = -814$$

Kemudian,

$$B_6 = A_6 + a_6 I_8$$

$$=\begin{bmatrix} 696 & 279 & -46 & -161 & -224 & 234 & -56 & 52 \\ -64 & 910 & -159 & -32 & 192 & 95 & -224 & -64 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & 676 & -104 & -20 \\ -24 & 172 & 159 & 666 & -64 & -47 & -288 & -112 \\ -56 & 220 & -307 & -164 & 846 & 387 & -128 & 80 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & 675 & -104 & -20 \\ 58 & 15 & 33 & -73 & 64 & 59 & 694 & -55 \\ -264 & -828 & 67 & 548 & 384 & -467 & 640 & 414 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} -814 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -814 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -814 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -814 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -184 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -184 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -184 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -118 & 279 & -46 & -161 & -224 & 234 & -56 & 52 \\ -64 & 96 & -159 & -32 & 192 & 95 & -224 & -64 \\ 150 & -55 & -831 & -95 & 128 & 676 & -104 & -20 \\ -24 & 172 & 159 & -148 & -64 & -47 & -288 & -112 \\ -56 & 220 & -307 & -164 & 32 & 387 & -128 & 80 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & -139 & -104 & -20 \\ 58 & 15 & 33 & -73 & 64 & 59 & -120 & -55 \\ -264 & -828 & 67 & 548 & 384 & -467 & 640 & -400 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_7 = A.B_6$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -118 & 279 & -46 & -161 & -224 & 234 & -56 & 52 \\ -64 & 96 & -159 & -32 & 192 & 95 & -224 & -64 \\ 150 & -55 & -831 & -95 & 128 & 676 & -104 & -20 \\ -24 & 172 & 159 & -148 & -64 & -47 & -288 & -112 \\ -56 & 220 & -307 & -164 & 32 & 387 & -128 & 80 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & -139 & -104 & -20 \\ 58 & 15 & 33 & -73 & 64 & 59 & -120 & -55 \\ -264 & -828 & 67 & 548 & 384 & -467 & 640 & -400 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -544 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -544 & 64 & 0 & 0 & -64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -513 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -180 & -544 & 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 124 & 0 & -544 & -124 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -513 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -41 & 0 & 0 & 41 & -544 & 0 \\ 0 & 0 & 196 & 0 & 0 & -196 & 0 & -544 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_7 = -\frac{Tr(A_7)}{7} = -\frac{(-544-544-31-544-544-513-544-544)}{7}$$

$$= -\frac{(-3808)}{7} = 544$$

kemudian,

$$B_7 = A_7 + a_7 I_8$$

$$=\begin{bmatrix} -544 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -544 & 64 & 0 & 0 & -64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -513 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -180 & -544 & 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 124 & 0 & -544 & -124 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -513 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -41 & 0 & 0 & 41 & -544 & 0 \\ 0 & 0 & 196 & 0 & 0 & -196 & 0 & -544 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-544&0&0&0&0&0&0&0\\0&-544&0&0&0&0&0&0\\0&0&-544&0&0&0&0&0\\0&0&0&-544&0&0&0&0\\0&0&0&0&-544&0&0&0\\0&0&0&0&0&-544&0&0\\0&0&0&0&0&0&-544&0\\0&0&0&0&0&0&0&-544\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&1&0&0\\0&0&64&0&0&-64&0&0\\0&0&513&0&0&-513&0&0\\0&0&-180&0&0&180&0&0\\0&0&124&0&0&-124&0&0\\0&0&-31&0&0&31&0&0\\0&0&-41&0&0&41&0&0\\0&0&196&0&0&-196&0&0\end{bmatrix}$$

Maka,

$$A_8 = A.B_7$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&0&-1&1\\0&-2&1&3&0&0&1&1\\1&1&0&0&-1&2&-3&0\\2&-2&0&1&2&3&1&1\\2&0&1&1&-3&0&-1&0\\1&1&0&0&-1&2&-3&0\\0&1&1&2&-2&-1&0&0\\3&2&0&-2&-3&1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&1&0&0\\0&0&64&0&0&-64&0&0\\0&0&513&0&0&-513&0&0\\0&0&-180&0&0&180&0&0\\0&0&124&0&0&-124&0&0\\0&0&-31&0&0&31&0&0\\0&0&-41&0&0&41&0&0\\0&0&196&0&0&-196&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$a_8 = -\frac{Tr(A_8)}{8} = 0$$

Kemudian,

$$B_8 = A_8 + a_8 I_8$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

1. Setelah menemukan nilai A_n, a_n, B_n, selanjutnya dicari nilai k untuk menentukan invers Drazinnya, yang mana $k = r - t = 8 - 7 = 1$

2. Mencari invers Drazinnya adalah :

$$A^D = (-1)^{k+1} {a_t}^{-k-1} A^k {B_{t-1}}^{k+1}$$

$$= (-1)^{1+1} {a_7}^{-1-1} A^1 {B_{7-1}}^{1+1}$$

$$= (-1)^2 {a_7}^{-2} A^1 {B_6}^2$$

$$= 1.(544)^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -118 & 279 & -46 & -161 & -224 & 234 & -56 & 52 \\ -64 & 96 & -159 & -32 & 192 & 95 & -224 & -64 \\ 150 & -55 & -831 & -95 & 128 & 676 & -104 & -20 \\ -24 & 172 & 159 & -148 & -64 & -47 & -288 & -112 \\ -56 & 220 & -307 & -164 & 32 & 387 & -128 & 80 \\ 150 & -55 & -17 & -95 & 128 & -139 & -104 & -20 \\ 58 & 15 & 33 & -73 & 64 & 59 & -120 & -55 \\ -264 & -828 & 67 & 548 & 384 & -467 & 640 & -400 \end{bmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{(544)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 23700 & -137346 & 40120 & 85358 & 123584 & -171392 & 39600 & -82040 \\ -14272 & 81248 & 42482 & -32160 & -6144 & -33906 & -40704 & 39040 \\ -43220 & 71970 & 621758 & -17870 & -68288 & -567670 & 30800 & 26616 \\ -30512 & -132936 & -163458 & 102520 & 84736 & 37474 & 108224 & -68320 \\ -21872 & -88232 & 181370 & 66584 & 99072 & -278042 & 55232 & -60768 \\ -43220 & 71970 & -40838 & -17870 & -68288 & 94926 & 30800 & 26616 \\ 8820 & 48718 & -71642 & -33602 & -16192 & 70738 & -17104 & 20040 \\ 132208 & 388392 & 59622 & -303000 & -286464 & 317114 & -297920 & 271200 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{295936}$$

$$\begin{bmatrix} 64192 & -151776 & 25838 & 87584 & 121856 & -128110 & 30464 & -28288 \\ 34816 & -52224 & 34400 & 17408 & -104448 & 416 & 121856 & 34816 \\ -81600 & 29920 & 34482 & 51680 & -69632 & 50382 & 56576 & 10880 \\ 13056 & -93568 & 60024 & 80512 & 34816 & -120952 & 156672 & -60928 \\ 30464 & -119680 & 66072 & 89216 & -17408 & -109592 & 69632 & -43520 \\ -81600 & 29920 & 34482 & 51680 & -69632 & 50382 & 56576 & 10880 \\ -31552 & -8160 & 15422 & 39712 & -34816 & -65470 & 65280 & 23936 \\ 143616 & 450432 & -195992 & -298112 & -208896 & 413592 & -348160 & 217600 \end{bmatrix}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} \frac{59}{277} & \frac{-279}{544} & \frac{12919}{147968} & \frac{161}{544} & \frac{7}{17} & \frac{-64055}{147968} & \frac{7}{68} & \frac{-13}{136} \\ \frac{2}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{1075}{9248} & \frac{1}{7} & \frac{-6}{17} & \frac{13}{9248} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{-75}{272} & \frac{55}{544} & \frac{17241}{147968} & \frac{95}{544} & \frac{-4}{17} & \frac{25191}{147968} & \frac{13}{68} & \frac{5}{136} \\ \frac{3}{68} & \frac{-43}{136} & \frac{7503}{36992} & \frac{37}{136} & \frac{2}{17} & \frac{-15119}{36992} & \frac{9}{17} & \frac{-7}{34} \\ \frac{7}{68} & \frac{-55}{136} & \frac{8259}{36992} & \frac{41}{136} & \frac{-1}{77} & \frac{-13699}{36992} & \frac{4}{7} & \frac{-5}{34} \\ \frac{-75}{4624} & \frac{55}{544} & \frac{17241}{147968} & \frac{95}{544} & \frac{-4}{17} & \frac{25191}{147968} & \frac{13}{68} & \frac{5}{136} \\ \frac{-29}{272} & \frac{-15}{544} & \frac{7711}{147968} & \frac{73}{544} & \frac{-2}{17} & \frac{-32735}{147968} & \frac{15}{68} & \frac{11}{136} \\ \frac{33}{68} & \frac{207}{136} & \frac{-24499}{36992} & \frac{-137}{136} & \frac{-12}{17} & \frac{51699}{36992} & \frac{-20}{17} & \frac{25}{34} \end{bmatrix}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa matriks singular juga mempunyai invers sama halnya dengan matriks non singular. Bagi para pembaca, penulis menyarankan untuk menghitung invers Drazin menggunakan metode lain atau dengan menggunakan matriks yang berbeda, kemudian membandingkan hasil yang dilakukan penulis sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aljabar Matriks, 2010. http://erwinrommel.staff.umm.ac.id/file//-2010//03/ALJABAR-MATRIKS.pdf (akses tanggal 23 januari 2015).

[2] Andrianto, Heri. Agus, Prijono. 2006. *Menguasai Matriks dan Vektor*. Bandung: Rekayasa Sains.

[3] Anton, Howard. Chris Rorres. 2007. *Aljabar Linier Elementer.* Jakarta: Erlangga.

[4] Catral, M. DD.Olesky and. P Van Den Driessche. 2009. *Block Representation of The Drazin Inverse of a Bipartite Matrix.* Electronic journal of linear algebra, Vol 18, pp(98-107).

[5] Khasanah, Lisnalwati dan Bambang Irawanto, 2011. “Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular”. Jurnal Matematika, Vol. 14 No. 3.

[6] Putra, Ise. 2013 “Invers Drazin dari Representasi Blok Matriks Bipartif”. Tugas Akhir Mahasiswa UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

[7] Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.

[8] Sibarani, Maslen. 2013. *Aljabar Linier*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.

[9] Tasic, B. Milan. 2003. “Izracunavanje Generalisanih Inverza”. Doktorska Disertacija. Univerzitet U Nisu. http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/doctorate/doc/2003-03-21-tm.pdf