Jurnal Sains Matematika dan Statistika
p-ISSN: 2460-4542
e-ISSN: 2615-8663
Program Studi Matematika FST UIN Suska Riau

# Menggunakan Metode Milne-Simpson dan Adams-Bashforth-Moulton

**Irma Suryani[1], Aldi Suprianto[2], Wartono[3], Rahmadeni[4]**

[1,2,3,4] Prodi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: irma.suryani@uin-suska.ac.id[1], affanaldi7@gmail.com[2], wartono@uin-suska.ac.id[3], rahmadeni@uin-suska.ac.id[4]
*Korespondensi penulis : irma.suryani@uin-suska.ac.id

## Abstrak

Model Verhulst merupakan salah satu model matematika yang digunakan dalam memprediksi jumlah populasi. Namun sekarang Model Verhulst digunakan untuk mengestimasi hasil produksi padi. Pada penelitian ini, Metode Milne-Simpson dan Metode Adams-Bashforth-Moulton akan diterapkan untuk menentukan solusi Model Verhulst. Bentuk solusi yang diperoleh adalah estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa dengan menggunakan persamaan Model Verhulst. Persamaan Model Verhulst terlebih dahulu diselesaikan dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat untuk mendapatkan solusi awal $P_1 = 211.990,3948205$; $P_2 = 222.476,1620290$; dan $P_3 = 233.232,7088189$. Kemudian, nilai awal disubstitusikan ke persamaan Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dan Milne-Simpson Orde Empat untuk mendapatkan nilai prediktor dan korektor. Kesimpulan yang didapatkan bahwa kedua metode tersebut dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial model Verhulst. Metode Milne-Simpson lebih akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial model Verhulst diketahui dari perbandingan jumlah *error*-nya, dan Metode Milne-Simpson lebih efisien dalam melakukan iterasi karena lebih cepat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Model Verhulst.

**Kata Kunci:** Metode Adams-Bashforth-Moulton, Metode Milne-Simpson, Metode Runge-Kutta, dan Model Verhulst.

## *Abstract*

*The Verhulst Models one of the mathematical models used to predict the population. But now, the Verhults Model used to estimate the yield of rice production. In this research, Milne-Simpson Method and Adams-Bashforth-Moulton Method will be applied to determine the solution of Verhulst Model. The form of the solution obtained is estimation of rice harvest in Gowa Regency by using Verhulst Model equation. The Verhulst Model equation firstly solved by using 4th order of Runge-Kutta Method to get initial solutions of* $P_1 = 211990,3948205$; $P_2 = 222.476,1620290$; *and* $P_3 = 233.232,7088189$. *Then, the initial values were subtituted into the 4th order of Adams-Bashforth-Moulton equation and the 4th Milne-Simpson equation to get the predictor and corrector values. It was concluded that both of the above* *methods can be used in solving differential equations of the Verhulst Model. The Milne-Simpson Method is more accurate in solving the differential equations of the Verhulst Model is known from the comparison of the number of errors, and the Milne-Simpson Method is more efficient in iterating because it is faster in solving the differential equations of the Verhulst Model.*

**Keywords:** *Adams-Bashforth-Moulton Method, Milne-Simpson Method, Runge-Kutta Method,and Verhulst Model.*

## 1. Pendahuluan

Salah satu cabang matematika yang sangat erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari adalah persamaan diferensial. Masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari itu kemudian dapat dirumuskan menjadi model matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Fenomena alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persaman diferensial contohnya pertumbuhan bakteri, model logistic menurut Verhulst, peluruhan radiokatif dan lain-lain. Persamaan diferensial adalah cabang matematika yang menyatakan hubungan yang kompleks antara satu variabel terikat dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya [8]. Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial berdasarkan banyaknya variabel bebas persamaan diferensial tersebut. Sedangkan berdasarkan sifat kelinierannya persamaan diferensial terbagi menjadi dua yaitu, persamaan diferensial linear dan nonlinear [9].

Model Verhulst merupakan salah satu model matematika yang berfungsi untuk memprediksi pertumbuhan populasi [10]. Pertumbuhan penduduk merupakan proses yang berkesinambungan dan terdapat beberapa model pertumbuhan penduduk yang berkesinambungan antara lain model populasi logistik dan model populasi eksponensial [11]. Persamaan diferensial nonlinier sebagain besar tidak dapat diselesaikan secara analitik. Persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan secara analitik dapat diselesaikan secara numerik. Semakin tinggi orde yang muncul pada persamaan diferensial maka akan semakin sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian dengan menggunakan metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memperoleh solusi pendekatannya [12].

Dalam metode numerik, solusi persamaan diferensial biasa terbagi dua metode, yaitu metode satu langkah (*one-step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*). Sebuah nilai awal dibutuhkan untuk memperoleh solusi menggunakan metode *one-step*, sedangkan metode *multi-step* membutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step*. Metode *one-step* yang seringkali digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial adalah Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Runge-Kutta. Metode *multi-step* bisa juga disebut sebagai metode prediktor-korektor. Metode yang termasuk metode *multi-step* adalah Metode Hamming, Metode Milne-Simpson, dan Metode Adams-Bashforth-Moulton.

Penelitian tentang perbandingan Metode Adams-Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam penyelesaian persamaan diferensial euler orde-8 [12]. Penelitian tentang solusi numerik Model Verhulst pada estimasi pertumbuhan hasil panen padi dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) [9]. Pada penelitian tersebut dibahas mengenai solusi numerik Model Verhulst untuk mencari estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa dengan menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde-4. Berdasarkan penelitian sebelumnya, pada artikel ini dibahas mengenai solusi numerik Model Verhulst untuk mencari estimasi hasil panen padi pada Kabupaten Gowa dengan menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dan Metode Milne-Simpson Orde Empat sebagai metode lain dalam penyelesaiannya.

## 2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian terapan, dilakukan pada bulan Juni 2022, data yang digunakan adalah data hasil panen padi sawah tahun 2007 sampai 2015 didapat dari *website* BPS Kabupaten Gowa [9]. Pada penelitian ini, diterapkan Model Verhulst, selanjutnya perhitungan dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dilakukan secara analitik untuk mendapatkan empat nilai awal dilanjutkan dengan menghitung prediktor dan korektor menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dan Metode Milne-Simpson pada aproksimasi ke empat dan dilanjutkan perhitungan numerik hingga aproksimasi ke satu.

**Tabel 1. Data Hasil Panen Padi Sawah Kab. Gowa**

| No. | Tahun | Data (Ton) |
|---|---|---|
| 1 | 2007 | 201790 |
| 2 | 2008 | 216580 |
| 3 | 2009 | 247002 |
| 4 | 2010 | 265848 |
| 5 | 2011 | 218154 |
| 6 | 2012 | 266059 |
| 7 | 2013 | 304766 |
| 8 | 2014 | 309909 |
| 9 | 2015 | 292156 |

### 2.1 Persamaan Diferensial Biasa Linier

Bentuk umum Persamaan diferensial biasa linier adalah sebagai berikut:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (1)$$

dengan $a_n \neq 0$, dan $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut *input* atau unsur nonhomogen. Jika $f(t)$ disebut input, maka solusi dari persamaan diferensial $x(t)$ biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai $t$ dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen.

### 2.2 Model Verhulst

Tahun 1838, model pertumbuhan logistik diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, yaitu Pierre Verhulst. Pada model ini jumlah populasi dipengaruhi oleh besar kecilnya daya dukung lingkungan. Laju pertumbuhan populasi terbatas karena ketersediaan makanan, tempat tinggal dan sumber hidup lainnya. Dengan asumsi tersebut, jumlah populasi dengan model ini akan selalu terbatas pada suatu nilai tertentu. Pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan, yakti jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama. Bentuk yang paling sederhana untuk laju pertumbuhan relatif yang menjelaskan asumsi ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{2}$$

apabila Persamaan (2) dikalikan dengan $P$, diperoleh model untuk pertumbuhan populasi yang dikenal sebagai persamaan diferensial logistik, sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{3}$$

Solusi persamaan logistik dapat diperoleh melalui:

$\frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = rdt$ sehingga diperoleh:

$$P = \frac{Ke^{rt+c}}{1+e^{rt+c}} \tag{4}$$

Hasil akhir dapat dilihat bahwa untuk nilai awal $t = 0$ dan $P(0) = P_0$ kemudian disubstitusikan ke Persamaan (4) diperoleh $c = \ln(P_0/(K - P_0))$, dan selanjutnya nilai $c$ tersebut disubstitusikan kembali ke dalam Persamaan (4), maka diperoleh bentuk sederhana dari solusi khusus model logistik sebagai berikut:

$$P_n = \frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)\cdot e^{-rt}} \tag{5}$$

## 2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode ini ditemukan oleh Carl Runge (1856-1927) dan Wilhelm Kutta (1867-1944) yang merupakan matematikawan asal Jerman. Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari Metode Deret Taylor yang digunakan untuk menyelesaikan persaman diferensial biasa. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan penggunaan turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ [15].

Metode Runge-Kutta Orde Empat sering digunakan untuk menyelesaiakn suatu persamaan diferensial karena metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Bentuk persamaan Metode Runge-Kutta Orde Empat adalah sebagai berikut [16]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{6}$$

Dalam hal ini $k$ adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

## 2.4 Metode Adams-Bashforth-Moulton

Penyelesaian persamaan diferensial biasa menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik $x$ tertentu dari persamaan diferensial biasa nonlinear orde satu $y' = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ yang diketahui. Metode Adams-Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah, yaitu langkah pertama prediksi dan langkah kedua adalah koreksi. Nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dapat diperoleh dari metode *one-step*, misalnya Metode Runge-Kutta [17].

Metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton adalah metode *multi-step* yang diturunkan dari teorema dasar kalkulus [18]:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, y(x)\big)dx \tag{7}$$

Persamaan prediktor Adams-Bashforth Orde Empat:

$$y_{n+1}^P = y_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \tag{8}$$

Persamaan korektor Adams-Moulton Orde Empat:

$$y_{n+1}^C = y_n + \frac{h}{24}(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1}) \tag{9}$$

## 2.5 Metode Milne-Simpson

Metode prediktor-korektor lain yang terkenal adalah Metode Milne-Simpson [18]. Prediktor berdasarkan integrasi dari $f\big(x, y(x)\big)$ pada interval $[x_{n-3}, x_{n+1}]$

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-3}) + \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f\big(x, y(x)\big)dx \tag{10}$$

Persamaan prediktor Milne:

$$y_{n+1}^P = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n) \tag{11}$$

Persamaan korektor Simpson:

$$y_{n+1}^C = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \tag{12}$$

Selanjutnya, untuk analisis *error* menggunakan definisi berikut :

**Definisi 1 [18]:** Misalkan $\hat{p}$ adalah aproksimasi (pendekatan) ke $p$. *Error* mutlak adalah $E_p = |p - \hat{p}|$ dan *error* relatif adalah $R_p = |p - \hat{p}|/|p|$, dinyatakan bahwa $p \neq 0$.

# 3. Hasil dan Pembahasan

## 3.1 Nilai Awal Model Verhulst menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

Nilai awal dicari dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat dengan persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{13}$$

Nilai $r$ (laju pertumbuhan) ditentukan menggunakan persamaan berikut [19]:

$$P = P_0 e^{rt} \tag{14}$$

$$r = \frac{1}{t} ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

$$r = \frac{1}{1} ln\left(\frac{216580}{201790}\right) \approx 0{,}07$$

dan $K$ (kapasitas tampung) diperoleh dengan cara *trial* and *error* yaitu mensubstitusikan perkiraan nilai $K$ kedalam Model Verhulst. Karena jumlah hasil panen padi di Kabupaten Gowa sejak tahun 2007-2015 masih berada dibawah 700.000 ton, maka diasumsikan nilai kapasitas tampungnya yaitu $K = 700.000$. Jika nilai $r$ dan $K$ disubstitusikan ke Persamaan (13), diperoleh:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}07P\left(1 - \frac{P}{700.000}\right)$$

Berikut hasil nilai awal $P_1$, $P_2$, dan $P_3$ yang diperoleh dari Metode Runge-Kutta Orde Empat pada interval [1,17] dengan ukuran langkah $h = 1$, dan $P_0 = 210.790$.

**Tabel 2. Nilai Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat**

| $n$ | $t_n$ | $h = 1$ | |
|---|---|---|---|
| | | $P_n$ | $f(t,P) = 0,07P\left(1 - \frac{P}{700000}\right)$ |
| 0 | 1 | 201790 | 10053,3795900 |
| 1 | 2 | 211990,3948205 | 10345,3348878 |
| 2 | 3 | 222476,1620290 | 10623,7670749 |
| 3 | 4 | 233232,7088189 | 10886,5399710 |

## 3.2 Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat Pada Estimasi Hasil Padi di Kabupaten Gowa

Solusi numerik yang merupakan estimasi hasil panen padi menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dicari setelah mendapatkan nilai awal. Nilai-nilai $P_1$, $P_2$, dan $P_3$ serta nilai $f_n(t_n, P_n)$ yang diperoleh dari Metode Runge-Kutta Orde Empat disubstitusikan ke persamaan Adams-Bashforts-Moulton.

Untuk $n = 3$ dan $P_3 = 227489{,}8320807$, diperoleh:

$$P_{n+1}^{(0)} = P_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n)$$

$$P_4^{(0)} = P_3 + \frac{h}{24}(-9f_0 + 37f_1 - 59f_2 + 55f_3)$$

$$= 244.243{,}3094658$$

Selanjutnya dicari nilai $f_4^{(0)}$, diperoleh:

$$f_4^{(0)} = f\left(t_4, P_4^{(0)}\right) = 11.131{,}5522407$$

**Tabel 3. Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat**

| $n$ | $t_n$ | $h = 1$ | | Galat Relatif |
|---|---|---|---|---|
| | | $P_n^{(0)}$ | $P_n$ | |
| 0 | 1 | | 201790 | |
| 1 | 2 | | 211990,3948205 | |
| 2 | 3 | | 222476,1620290 | |
| 3 | 4 | | 233232,7088189 | |
| 4 | 5 | 244243,3094658 | 244243,3210940 | $0{,}5387678 \times 10^{-7}$ |
| 5 | 6 | 255489,1917714 | 255489,2147185 | $0{,}9924217 \times 10^{-7}$ |
| 6 | 7 | 266949,5852019 | 266949,6197699 | $1{,}4182319 \times 10^{-7}$ |
| 7 | 8 | 278601,8519996 | 278601,8981945 | $1{,}8073100 \times 10^{-7}$ |
| 8 | 9 | 290421,6368710 | 290421,6943788 | $2{,}1516106 \times 10^{-7}$ |
| 9 | 10 | 302383,0490352 | 302383,1172104 | $2{,}4442318 \times 10^{-7}$ |
| 10 | 11 | 314458,8733840 | 314458,9512523 | $2{,}6796806 \times 10^{-7}$ |
| 11 | 12 | 326620,8074605 | 326620,8937357 | $2{,}8540845 \times 10^{-7}$ |
| 12 | 13 | 338839,7201154 | 338839,8132318 | $2{,}9653384 \times 10^{-7}$ |
| 13 | 14 | 351085,9269694 | 351086,0251279 | $3{,}0131756 \times 10^{-7}$ |
| 14 | 15 | 363329,4772335 | 363329,5784595 | $2{,}9991581 \times 10^{-7}$ |
| 15 | 16 | 375540,4460354 | 375540,5482465 | $2{,}9265859 \times 10^{-7}$ |
| 16 | 17 | 387689,2262133 | 387689,3272919 | $2{,}8003311 \times 10^{-7}$ |

**Tabel 4. Estimasi Hasil Panen Padi**

| $n$ | $t_n$ | $h = 1$ | | Data (ton) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | | $P_n^{(0)}$ | $P_n$ | |
| 0 | 2007 | | 201790 | 201790 |
| 1 | 2008 | | 211990,3948205 | 216580 |
| 2 | 2009 | | 222476,1620290 | 247002 |
| 3 | 2010 | | 233232,7088189 | 265848 |
| 4 | 2011 | 244243,3094658 | 244243,3210940 | 218154 |
| 5 | 2012 | 255489,1917714 | 255489,2147185 | 266059 |
| 6 | 2013 | 266949,5852019 | 266949,6197699 | 304766 |
| 7 | 2014 | 278601,8519996 | 278601,8981945 | 309909 |
| 8 | 2015 | 290421,6368710 | 290421,6943788 | 292156 |
| 9 | 2016 | 302383,0490352 | 302383,1172104 | |
| 10 | 2017 | 314458,8733840 | 314458,9512523 | |
| 11 | 2018 | 326620,8074605 | 326620,8937357 | |
| 12 | 2019 | 338839,7201154 | 338839,8132318 | |
| 13 | 2020 | 351085,9269694 | 351086,0251279 | |
| 14 | 2021 | 363329,4772335 | 363329,5784595 | |
| 15 | 2022 | 375540,4460354 | 375540,5482465 | |
| 16 | 2023 | 387689,2262133 | 387689,3272919 | |

Nilai prediktor selanjutnya diperbaiki dengan menggunakan persamaan korektor sebagai berikut:

$$P_{n+1}^{(c)} = P_n + \frac{h}{24}(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1})$$

$$P_4^{(1)} = P_3 + \frac{h}{24}(f_2 - 5f_3 + 19f_4 + 9f_5)$$

$$= 244.243,3226249$$

Nilai prediktor dan korektor selanjutnya digunakan untuk mencari *error* relatif, diperoleh:

$$\frac{\left|P_4^{(1)} - P_4^{(0)}\right|}{\left|P_4^{(1)}\right|} = \frac{|244243,3226249 - 244243,3094658|}{|244243,3226249|} = 0,5387678 \times 10^{-7}$$

Dari hasil diatas dapat diperoleh *error* relatif lebih kecil dari kriteria pemberhentian $\varepsilon = 7 \times 10^{-7}$, sehingga iterasi dilanjutkan sampai iterasi ke-17 seperti yang terlihat pada Tabel 3.

Semua solusi numerik pada Tabel 3 telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 7 \times 10^{-7}$. Dapat dilihat bahwa semakin bertambahnya tahun, jumlah hasil panen padi sawah di Kabupaten Gowa semakin meningkat. Nilai $P_n$ untuk $n = 4$ sampai $n = 16$ pada Tabel 3 merupakan nilai korektor Adams-Bashforth-Moulton menyatakan solusi Model Verhulst berbentuk estimasi hasil panen padi. Kemudian, Tabel 4 merupakan perbandingan solusi estimasi hasil panen dari Model Verhulst menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat dengan data yang sebenarnya mulai $n = 4$ sampai $n = 8$.

### 3.3 Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Milne-Simpson Orde Empat Pada Estimasi Hasil Padi di Kabupaten Gowa

Solusi numerik yang merupakan estimasi hasil panen padi menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat akan dicari setelah diperoleh nilai awal. Nilai-nilai $P_1$, $P_2$, dan $P_3$ serta nilai $f_n(t_n, P_n)$ yang diperoleh dari Metode Runge-Kutta Orde Empat disubstitusikan ke persamaan Milne-Simpson.

Untuk $n = 3$ dan $P_0 = 201790$, diperoleh:

$$P_{n+1}^{(0)} = P_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n)$$

$$P_4^{(0)} = P_0 + \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3)$$

$$= 244.243{,}3101904$$

Selanjutnya dicari nilai $f_4^{(0)}$, diperoleh:

$$f_4^{(0)} = f\left(t_4, P_4^{(0)}\right) = 11.131{,}5522561$$

**Tabel 5. Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Milne-Simpson Orde Empat**

| $n$ | $t_n$ | $h = 1$ | | Galat Relatif |
|---|---|---|---|---|
| | | $P_n^{(0)}$ | $P_n$ | |
| 0 | 1 | | 201790 | |
| 1 | 2 | | 211990,3948205 | |
| 2 | 3 | | 222476,1620290 | |
| 3 | 4 | | 233232,7088189 | |
| 4 | 5 | 244243,3101904 | 244243,3210940 | $0{,}4771394 \times 10^{-7}$ |
| 5 | 6 | 255489,1936901 | 255489,2147185 | $0{,}8669745 \times 10^{-7}$ |
| 6 | 7 | 266949,5883602 | 266949,6197699 | $1{,}2325493 \times 10^{-7}$ |
| 7 | 8 | 278601,8564130 | 278601,8981945 | $1{,}5662326 \times 10^{-7}$ |
| 8 | 9 | 290421,6425213 | 290421,6943788 | $1{,}8611291 \times 10^{-7}$ |
| 9 | 10 | 302383,0558689 | 302383,1172104 | $2{,}1113376 \times 10^{-7}$ |
| 10 | 11 | 314458,8813119 | 314458,9512523 | $2{,}3121778 \times 10^{-7}$ |
| 11 | 12 | 326620,8163589 | 326620,8937357 | $2{,}4603707 \times 10^{-7}$ |
| 12 | 13 | 338839,7298286 | 338839,8132318 | $2{,}5541629 \times 10^{-7}$ |
| 13 | 14 | 351085,9373145 | 351086,0251279 | $2{,}5933847 \times 10^{-7}$ |
| 14 | 15 | 363329,4880054 | 363329,5784595 | $2{,}5152234 \times 10^{-7}$ |
| 15 | 16 | 375540,4570143 | 375540,5482465 | $2{,}5152234 \times 10^{-7}$ |
| 16 | 17 | 387689,2371720 | 387689,3272919 | $2{,}4049787 \times 10^{-7}$ |

**Tabel 6. Estimasi Hasil Panen Padi**

| $n$ | $t_n$ | $h = 1$ | | Data (ton) |
|---|---|---|---|---|
| | | $P_n^{(0)}$ | $P_n$ | |
| 0 | 2007 | | 201790 | 201790 |
| 1 | 2008 | | 211990,3948205 | 216580 |
| 2 | 2009 | | 222476,1620290 | 247002 |
| 3 | 2010 | | 233232,7088189 | 265848 |
| 4 | 2011 | 244243,3101904 | 244243,3210940 | 218154 |
| 5 | 2012 | 255489,1936901 | 255489,2147185 | 266059 |
| 6 | 2013 | 266949,5883602 | 266949,6197699 | 304766 |
| 7 | 2014 | 278601,8564130 | 278601,8981945 | 309909 |
| 8 | 2015 | 290421,6425213 | 290421,6943788 | 292156 |
| 9 | 2016 | 302383,0558689 | 302383,1172104 | |
| 10 | 2017 | 314458,8813119 | 314458,9512523 | |
| 11 | 2018 | 326620,8163589 | 326620,8937357 | |
| 12 | 2019 | 338839,7298286 | 338839,8132318 | |
| 13 | 2020 | 351085,9373145 | 351086,0251279 | |
| 14 | 2021 | 363329,4880054 | 363329,5784595 | |
| 15 | 2022 | 375540,4570143 | 375540,5482465 | |
| 16 | 2023 | 387689,2371720 | 387689,3272919 | |

Selanjutnya, nilai prediktor diperbaiki menggunakan persamaan korektor diperoleh:

$$P_{n+1}^{(c)} = P_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1})$$
$$P_4^{(1)} = P_2 + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4)$$
$$= 244.243,3218442$$

Kemudian, nilai prediktor dan korektor akan digunakan untuk mencari *error* relatif, didapat:

$$\frac{\left|P_4^{(1)} - P_4^{(0)}\right|}{\left|P_4^{(1)}\right|} = \frac{|244243,3218442 - 244243,3101904|}{|244243,3218442|} = 0,4771394 \times 10^{-7}$$

Dari hasil diperoleh dari kriteria pemberhentian $\varepsilon = 7 \times 10^{-7}$ terlihat bahwa *error* relatif lebih kecil, sehingga iterasi dilanjutkan sampai iterasi ke-17 dan diperoleh Tabel 5. Dari Tabel 5 terlihat bahwa semua solusi numerik telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 7 \times 10^{-7}$. Artinya, Dari tahun ke tahun, jumlah padi yang dipanen Kabupaten Gowa mengalami peningkatan. Nilai $P_n$ untuk $n = 4$ sampai $n = 16$ pada Tabel 5 merupakan nilai korektor Milne-Simpson yang merupakan solusi Model Verhulst berbentuk estimasi hasil panen padi. Selanjutnya, Perbandingan solusi estimasi hasil panen dari model Verhulst menggunakan Metode Milne-Simpson Orde Empat dengan data yang sebenarnya mulai $n = 4$ sampai $n = 8$ dapat dilihat pada Tabel 6.

## 4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah Metode Milne-Simpson dan Metode Adams-Bashforth-Moulton dengan Model Verhulst dalam memprediksi (estimasi) pertumbuhan hasil panen padi di Kabupaten Gowa menunjukkan bahwa setiap tahunnya jumlah hasil panen padi meningkat. Lebih lanjut, hasil perbandingan antara Metode Milne-Simpson dan Metode Adams-Bashforth-Moulton, dapat disimpulkan bahwa Metode Milne-Simpson lebih efisien dibandingkan dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Model Verhulst karena lebih akurat, ini terlihat dari jumlah perbandingan *error*-nya.

## Daftar Pustaka


[1] Yang, M., Fang, H., Wang, F., Jia, H., Lei, J., Zhang, D., "The three dimension first-order symplectic partitioned Runge-Kutta scheme simulation for GPR wave propagation in pavement structure", *IEEE Access,* 7: 151705-151712, 2019.

[2] Aksim, D., Pavlov, D. 2020., "On the extension of Adams–Bashforth–Moulton methods for numerical integration of delay differential equations and application to the moon's orbit", *Mathematics in Computer Science*, 14: 103-109, 2020.

[3] Pratiwi, C.D., Mungkasi, S., "Euler's and Heun's numerical solutions to a mathematical model of the spread of COVID-19, *AIP Conference Proceedings*, 2353(1): 030110, 2021.

[4] Simangunsong, L., Mungkasi, S., "Fourth order Runge-Kutta method for solving a mathematical model of the spread of HIV-AIDS", *AIP Conference Proceedings*, 2353(1): 030092, 2021.

[5] Nugroho, B., Denih, A., "Perbandingan kinerja metode pra-pemrosesan dalam pengklasifikasian otomatis dokumen paten", *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika*, 17(2): 381-387, 2020.

[6] Dewi, N.P.N.P., Nugroho, R.A., "Optimasi General Regression Neural Network Dengan Fruit Fly Optimization Algorithm Untuk Prediksi Pemakaian Arus Listrik Pada Penyulang", *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer Dan Matematika*, 18(1): 1-12, 2021.

[7] Saepulrohman, A., Negara, T.P. 2021. "Implementasi algoritma tanda tangan digital berbasis kriptografi kurva eliptik *Diffie-Hellman*", *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika,* 18(1): 22-28, 2021.

[8] Rahmi, K.Y., "Developing Inquiry Based Module for Ordinary Differential Equation Course", *MATHLINE: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 7(1): 131-141, 2022.

[9] Side, S., Maya, S.W., Arifuddin, R., "Solusi Numerik Model Verhulst pada Estimasi Pertumbuhan Hasil Panen Padi dengan Metode *Adam Bashforth-Moulton* (ABM)", *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 2(1). 91-98, 2019.

[10] Manave, R., Ariyanto, Kristina, B.G., ″Analisis Model Verhulst Kaitannya Dengan Ketersediaan Dokter Umum di Kabupaten TTS", *J-Icon: Jurnal Komputer & Informatika,* 7(1). 9-16, 2019.

[11] Nuraeni, Z., "Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi", *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika,* 5(1); 9-16, 2017.

[12] Latip, F., Dorrah, A., Suharsono, "Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8", *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif*, 2017.

[13] Hanifah, I. N., "Analisis Model Getaran Pegas Teredam dengan Metode Adams-Basforth-Moulton dan Runge-Kutta", *Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, Jember*, 2013.

[14] Nurman, T. A., & Abdullah, S., "Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan", *Jurnal MSA,* 5(1); 87-92, 2017.

[15] Riski, A., "Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Pangkat p=1/2", *Skripsi, Sarjana UIN SUSKA,* 2019.

[16] Surany, E.B., "Metode Runge-Kutta Orde 4 pada Solusi Numerik Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis", *Skripsi, Sarjana USU*, 2021.

[17] Apriadi, Prihandono, B. & Noviani, E., "Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Nonlinear", *Buletin Ilmiah Mat.Stat dan Terapannya (Bimaster),* 03(2); 107-116, 2014.