

Lingkaran Singgung Luar Segiempat Tidak Konveks

Rika Delpita Sari¹, Mashadi²

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email : rika_azakinara@yahoo.com

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas cara mengkonstruksi lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks dan pembuktian kongkurensi dari 6 buah bisektor sudut dengan menggunakan teorema Ceva. Selanjutnya ditentukan panjang jari-jari lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks dengan menggunakan luas segiempat tidak konveks. Penelitian ini membuktikan bahwa lingkaran singgung luar dapat dikonstruksi pada segiempat tidak konveks.

Kata kunci: *Lingkaran singgung luar segitiga, lingkaran singgung luar segiempat konveks, teorema Ceva.*

ABSTRACT

In this article discussed how to construct a tangent circle outside the not convex quadrilateral and proof the concurrency of six bisector angle using Ceva theorem. Furthermore, the length specified radius tangent circles outside the not convex quadrilateral with the area of not convex quadrilateral.. This study proves that the outer circle tangent can be constructed on a quadrilateral is not convex.

Keywords: *Tangent circle outside the triangle, circle tangent outer convex quadrilateral, Ceva theorem.*

PENDAHULUAN

Dalam geometri dipelajari mengenai lingkaran singgung luar segitiga. Lingkaran singgung luar adalah suatu lingkaran yang menyinggung salah satu sisi dari segitiga sebelah luar dan perpanjangan dua sisi lainnya. Lingkaran singgung luar adalah suatu lingkaran yang menyinggung salah satu sisi dari segitiga sebelah luar dan perpanjangan dua sisi lainnya. Lingkaran singgung luar terkadang disebut juga dengan lingkaran luar (excircles). Definisi lingkaran singgung luar segitiga menurut Coxeter dan Greitzer[1] merupakan lingkaran yang menyinggung sisi dan perpanjangan dari dua sisi lainnya.

Bukan hanya segitiga yang memiliki lingkaran singgung luar, segiempat juga memiliki lingkaran singgung luar segiempat. Lingkaran singgung luar segiempat merupakan lingkaran yang menyinggung sisi maupun perpanjangan sisi lainnya seperti yang ditulis oleh Martin [2],

Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Martin [3] dibahas tentang lingkaran singgung luar segiempat yang lain. Namun belum ada yang membahas mengenai lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks. Oleh karena itu pada artikel ini dibahas mengenai kekonkurensan bisektor sudut dalam dan bisektor sudut luar segiempat tidak konveks dengan menggunakan Teorema Ceva dan konkurensi bisektor sudut. Juga dibahas cara mengkonstruksikan lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks serta menentukan panjang jari-jari lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks.

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam pengkonstruksian lingkaran singgung luar segiempat ada beberapa metode yang harus dilakukann diantaranya adalah membuktikan kekonkurensan keenam bisektor sudut dalam dan bisektor sudut luar dari segiempat tidak konveks tersebut dengan menggunakan teorema Ceva. Dalam membuktikan konkurensi bisektor sudut pada segiempat (sudut internal) dan garis bagi external segiempat berpotongan disatu titik pada segiempat tidak konveks ada beberapa langkah yaitu a. Buktikan AP , BP dan CP berpotongan di titik P , selanjutnya buktikan AG' , $B'H'$ dan DI' berpotongan di titik P' dan setelah itu buktikan $P = P'$

Untuk menentukan panjang jari – jari lingkaran singgung luarnya terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa titik konkurensi tersebut memiliki jarak yang sama terhadap segiempat tidak konveks serta perpanjangan dua sisi segiempat lainnya yaitu dengan membuktikan titik konkurensi AP , BP , CP dan DP memiliki jarak yang sama ke sisi DC dan CB serta perpanjangan sisi AD dan AB . Kemudian akan panjang panjang jari – jari lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks dengan menggunakan luas segiempat tidak konveks.

Sedangkan untuk menentukan panjang sisi hasil kontruksi menggunakan perbandingan phytagoras akan didapat panjang KC . Dengan mensustitusikan panjang KC didapat panjang BF dan DE .

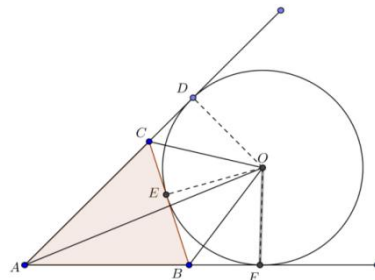
Lingkaran Singgung Luar Segitiga

Lingkaran singgung luar segitiga atau yang lebih dikenal dengan istilah *excircle* merupakan lingkaran yang menyinggung sisi luar segitiga. Mashadi dalam [4] memberikan definisi dari lingkaran singgung luar segitiga yaitu

Definisi 1 :

Lingkaran singgung luar pada suatu $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang menyinggung sebuah sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya

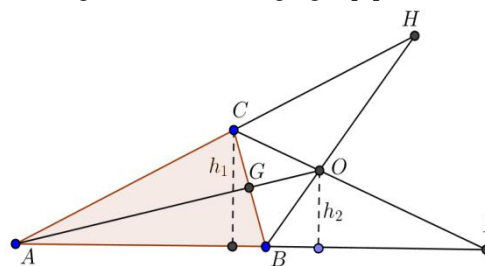
Ilustrasi dari Definisi 2.1 dapat dilihat pada Gambar 2.1. Suatu $\triangle ABC$ memiliki lingkaran singgung luar yang berpusat di titik O . Lingkaran tersebut menyinggung sisi BC di titik E , dan perpanjangan sisi AB dan AC berturut-turut di titik F dan D .



Gambar 1. Lingkaran Singgung Luar pada $\triangle ABC$

Kongkurensi Bisektor pada Lingkaran Singgung Luar Segitiga

Kongkurensi menunjukkan tiga buah garis yang berpotongan disatu titik dalam suatu segitiga. Sebelum membuktikan kongkurensi bisektor sudut pada lingkaran singgung luar segitiga, terlebih dahulu dibahas tentang Teorema Ceva. Teorema ceva merupakan salah satu cara untuk menunjukkan kongkurensi dari tiga buah garis. Teorema Ceva yang digunakan yaitu kongkurensi di luar segitiga [4].



Gambar 2. Garis AG, BH dan CI Kongkuren di Titik O Diluar $\triangle ABC$

Teorema 1. (Teorema Ceva)

Jika titik G, H , dan I masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA , dan AB maka garis AG, BH dan CI berpotongan di satu titik jika dan hanya jika:

$$\frac{CG}{GB} \times \frac{BI}{IH} \times \frac{AH}{HC} = 1$$

Teorema Urquhart

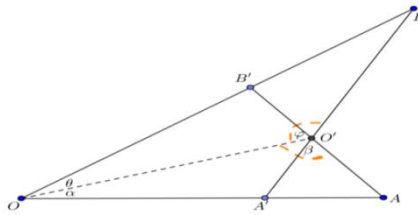
Jika OA dan OB dua buah garis yang berpotongan di O . Titik A' suatu titik pada OA , serta B' suatu titik pada OB dan O' merupakan perpotongan antara AB' dengan $A'B$. Maka akan berlaku hubungan [7] yang ditulis dalam Teorema 2.

Teorema 2

Diberikan OA dan OB dua buah garis yang berpotongan di O . Titik A' suatu titik pada OA , serta B' suatu titik pada OB dan O' merupakan perpotongan antara AB' dengan $A'B$ maka berlaku

$$OA + AO' = OB + BO' \Leftrightarrow OA' + A'O' = OB' + O'B'$$

Bukti : Bukti lihat [7] Seperti pada gambar 3

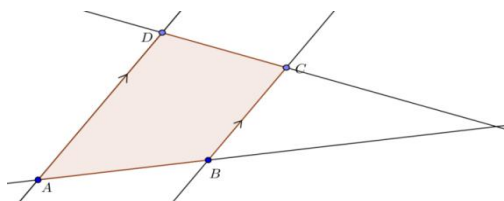


Gambar 3. Ilustrasi Teorema Urquhart dengan Penambahan sudut

Lingkaran Singgung Luar Segiempat konveks didepan sudut C

Tidak semua segiempat konveks dapat dibentuk lingkaran singgung yang berada di depan titik C. Oleh sebab itu sebelum mengkonstruksi lingkaran singgung, maka haruslah diketahui syarat dari suatu segiempat yang memiliki lingkaran singgung di depan titik C.

Syarat yang pertama agar suatu segiempat konveks memiliki lingkaran singgung luar di depan titik C yaitu tidak ada sisi yang sejajar. Segiempat ABCD ($\square ABCD$) yang memiliki sepasang sisi yang sejajar yaitu $AD \parallel BC$. Jika dibuat perpanjangan dari masing-masing sisi $\square ABCD$ maka sisi yang sejajar tersebut tidak akan pernah berpotongan. Sehingga tidak mungkin dapat dibentuk lingkaran yang menyinggung dari semua perpanjangan sisi $\square ABCD$. Seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Segiempat ABCD dengan $AD \parallel BC$.

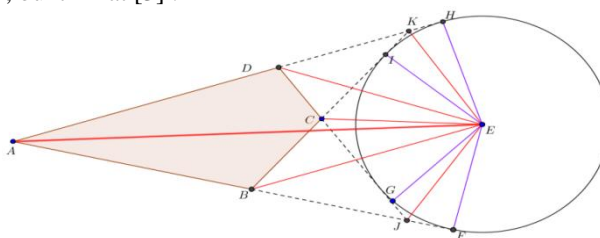
Selain tidak ada sisi yang sejajar juga ada syarat yang kedua yaitu penjumlahan dua sisi yang berdekatan adalah sama [3].

Teorema 3

Suatu $\square ABCD$ dengan panjang sisi $AB = a, BC = d, CD = c$ dan $AD = b$ akan mempunyai lingkaran singgung luar di depan titik C jika dan hanya jika

$$a + b = c + d$$

Bukti: perhatikan Gambar 5, bukti lihat [3].



Gambar 5. Lingkaran Singgung Luar $\square ABCD$ di Depan Titik C

Jari-jari Lingkaran Singgung Luar Segiempat

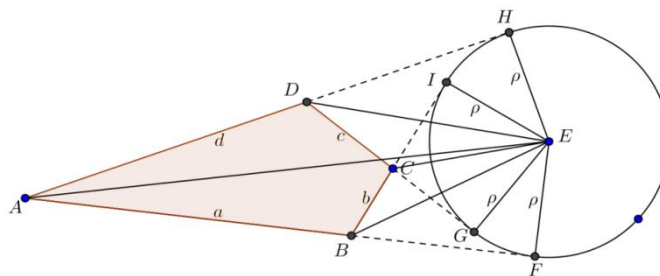
Seperti halnya lingkaran singgung luar segitiga, maka jari-jari lingkaran singgung luar segiempat juga dapat dihubungkan dari luas segiempat [4].

Teorema 4

Sebuah lingkaran singgung luar segiempat dengan panjang sisi a, b, c dan d mempunyai panjang jari-jari

$$\rho = \frac{L \square ABCD}{a - c} = \frac{L \square ABCD}{d - b}$$

Bukti: Bukti lihat [3], perhatikan Gambar 6



Gambar 6. Lingkaran Singgung dengan Jari-jari ρ

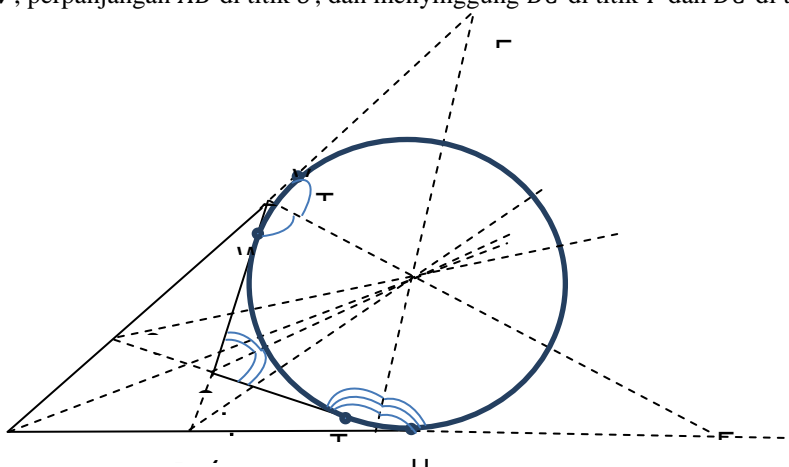
HASIL DAN PEMBAHASAN

Konstruksi Lingkaran Singgung Luar Segiempat Tidak konveks

Tidak semua segiempat tidak konveks dapat dibentuk lingkaran singgung luar yang berada di depan titik C .

Adapun Langkah-langkah dalam mengkonstruksi lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks adalah sebagai berikut:

- Buatlah segiempat tidak konveks $ABCD$ yang mempunyai panjang sisi $AB = a, BC = b, CD = c$ dan $AD = d$ dengan syarat semua sisinya tidak ada yang sejajar serta memenuhi persamaan $a + b = c + d$.
- Perpanjang sisi BC sehingga berpotongan dengan AD di titik D' , Dimana panjang AD' tidak boleh lebih dari setengah AD . Kemudian perpanjang juga sisi DC sehingga memotong AB di titik B' , Dimana panjang AB' tidak boleh lebih dari setengah AB dan jarak titik A ke titik C tidak boleh lebih panjang dari jari – jari lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks.
- Buatlah masing-masing garis bisektor sudut pada sudut-sudut internal, yaitu $\angle A$ dan $\angle C$, sudut-sudut eksternal, yaitu sudut $\angle EDB$ dan $\angle CBF$, serta 2 buah sudut yang terbentuk dari perpanjangan keempat sisi segiempat. Keenam bisektor sudut tersebut akan berpotongan di titik P .
- Dari titik P tersebut tarik garis yang tegak lurus ke perpanjangan sisi AD , beri nama titik V . Lalu lukis lingkaran yang berpusat di P dan berjari-jari PV . Sehingga lingkaran tersebut menyinggung perpanjangan sisi AB di titik V , perpanjangan AB di titik U , dan menyinggung BC di titik T dan DC di titik W .

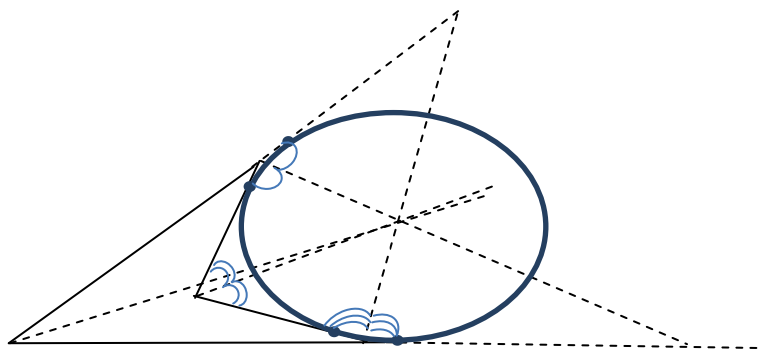


Gambar 7. Titik Pusat Lingkaran yang Terbentuk dari Perpotongan Enam Bisektor Sudut

Lingkaran Singgung Luar Segiempat Tidak konveks

Sebelum membahas mengenai lingkaran singgung luar segiempat tidak konveks, akan dibahas lebih dulu kekonkurenan bisektor sudut luar dan bisektor sudut dalam segi empat tidak konveks.

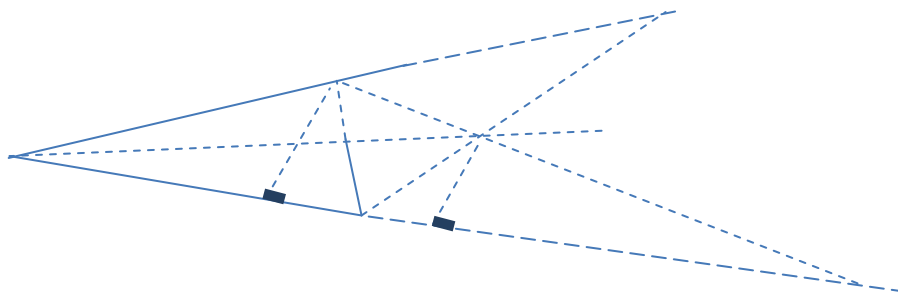
Diberikan segiempat tidak konveks $ABCD$ dengan panjang $AB = a, BC = b, CD = c$ dan $DA = d$. Buatlah masing-masing garis bisektor sudut pada sudut-sudut internal, yaitu $\angle A$ dan $\angle C$, sudut-sudut eksternal, yaitu sudut $\angle EDB$ dan $\angle CBF$, Akan ditunjukkan internal bisector dan eksternal bisektor tersebut konkuren di titik P . perhatikan Gambar 8



Gambar 8. Garis AP, BE, DF dan CP Kongkuren di Titik P

Bukti :

Perpanjang sisi BC sehingga berpotongan dengan AD di titik D' , Kemudian perpanjang juga sisi DC sehingga memotong AB di titik B' . Tarik bisector $\angle BD'E$ sehingga memotong AB di titik I , kemudian tarik bisector $\angle DB'B$ sehingga memotong AD di titik H Seperti pada Gambar 9



Gambar 9. Kekongkurenan AC, HB dan $D'I$

1. Akan ditunjukkan AC, HB dan $D'I$ kongkuren di titik P

(\Rightarrow) Perhatikan $\Delta AD'I$ dan $\Delta BD'I$ pada Gambar 3.3, memiliki tinggi yang sama yaitu h_1 , dan ΔAPI dan ΔBPI memiliki tinggi yang sama yaitu h_2 , berdasarkan konsep luas $\Delta AD'P$ sama dengan luas $\Delta AD'I$ dikurangi luas $\Delta AD'P$ sehingga diperoleh

$$L \Delta AD'I = \frac{1}{2} AI(h_1 - h_2) \tag{1}$$

Dengan cara yang sama pada $\Delta BD'P$ diperoleh

$$L \Delta BD'P = \frac{1}{2} BI(h_1 - h_2) \tag{2}$$

Dengan membandingkan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{L \Delta BD'P}{L \Delta AD'P} = \frac{BI}{AI} \tag{3}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, pada ΔAPB dan $\Delta BD'P$, diperoleh perbandingan

$$\frac{L \Delta AD'B}{L \Delta BD'P} = \frac{GD'}{GB} \tag{4}$$

sedangkan pada ΔAPB dan $\Delta AD'P$, diperoleh

$$\frac{L \Delta AD'P}{L \Delta AD'B} = \frac{AH}{D'H} \tag{5}$$

Jika persamaan (3), (4) dan (5) dikalikan maka diperoleh

$$\frac{D'G}{GB} \times \frac{BI}{IA} \times \frac{AH}{HD'} = 1.$$

(\Leftrightarrow) Misalkan pada garis BC terdapat titik G' , sehingga $G \neq G'$ diperoleh

$$\frac{D'G}{GB} \times \frac{BI}{IA} \times \frac{AH}{HD'} = 1.$$

dan

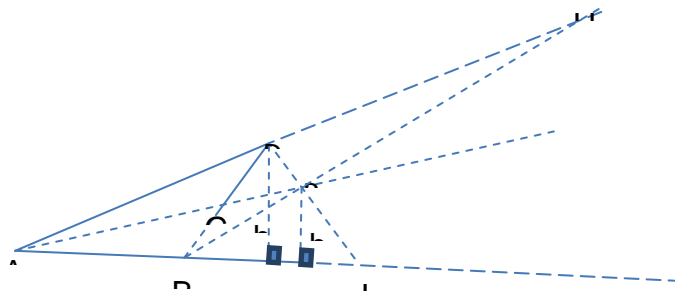
$$\frac{D'G'}{G'B} \times \frac{BI}{IA} \times \frac{AH}{HD'} = 1.$$

$$\frac{D'G}{GB} = \frac{D'G'}{G'B}.$$

$$GB = G'B.$$

Hal ini mengakibatkan $G = G'$, sehingga G dan G' berhimpit. ■

2. Akan ditunjukkan $AG', B'H'$ dan DI' konkuren di titik P' . Perhatikan Gambar10



Gambar 10. Kekonkurenan $AG', B'H'$ dan DI'

Untuk membuktikan $AG', B'H'$ dan DI' konkuren di titik P' dapat menggunakan langkah yang sama pada pembuktian $AP, B'P$ dan BE konkuren di titik P

3. karena ada dua titik konkuren P dan P' akan ditunjukkan $P = P'$,

Perhatikan $\Delta AD'B$ dan $\Delta AB'D$ pada Gambar 11.. dengan menggunakan teorema Urquhart diperoleh

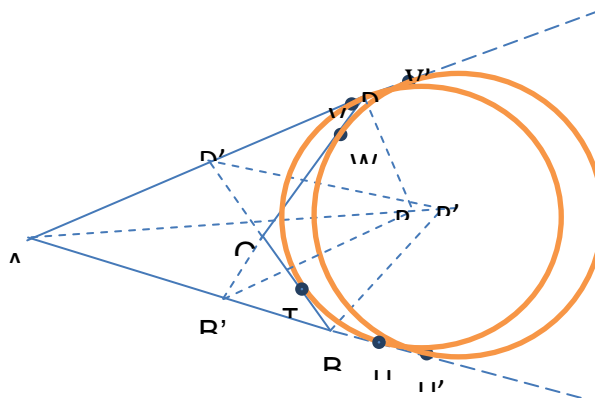
$$K \Delta AD'B = K \Delta AB'D.$$

Dan dengan memisalkan s merupakan setengah dari keliling suatu segitiga maka

$$s \Delta AD'B = s \Delta AB'D$$

Perhatikan $\Delta AD'B$. Buat lingkaran singgung luar dari $\Delta AD'B$ beri nama titik P sebagai titik pusatnya. Misalkan lingkaran singgung tersebut menyinggung perpanjangan $D'B$ di titik T , perpanjangan AD' di titik V dan perpanjangan AB di titik U . Sehingga panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di P yang dilambangkan dengan r_p adalah

$$PT = PU = PV = r_p \tag{6}$$



Gambar 11. Segiempat $ABCD$ yang Mempunyai Dua Buah Lingkaran Singgung

Karena setengah keliling suatu segitiga yang memiliki lingkaran singgung luar sama dengan panjang garis singgungnya [6], maka

$$s\Delta AD'B = AU$$

atau

$$s\Delta AD'B = AV$$

Perhatikan $\Delta AB'D$. Buat lingkaran singgung luar dari $\Delta AB'D$ beri nama P' sebagai titik pusatnya. Misalkan lingkaran singgung tersebut menyinggung perpanjangan AD di titik V' , sisi $B'D$ di titik W dan perpanjangan AB' di titik U' . Sehingga panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di P' yang dilambangkan dengan $r_{P'}$, adalah

$$P'U' = P'V' = P'W = r_{P'} \quad (7)$$

Karena setengah keliling suatu segitiga yang memiliki lingkaran singgung luar sama dengan panjang garis singgungnya [6], maka

$$s\Delta AB'D = AU',$$

atau

$$s\Delta AB'D = AV'$$

Karena $s\Delta AD'B = s\Delta AB'D$ maka haruslah

$$U = U', \quad (8)$$

dan

$$V = V', \quad (9)$$

Karena lingkaran yang berpusat di P dan P' memiliki dua buah titik singgung yang sama yaitu di titik U dan V maka haruslah

$$P' = P \quad \blacksquare$$

3. Tarik garis dari $\angle C$ yang melalui titik P akan ditunjukkan CP bisektor $\angle DCB$

Dengan menghubungkan titik C dan P maka terbentuk 2 buah segitiga yaitu ΔCIE dan ΔCEG yang memiliki

$$CI = CG \text{ (sisi)}, \quad (10)$$

$$\angle CIE = \angle CGE \text{ (sudut)}, \quad (11)$$

$$EI = EG \text{ (sisi)}. \quad (12)$$

Berdasarkan persamaan (10), (11) dan (12) diperoleh

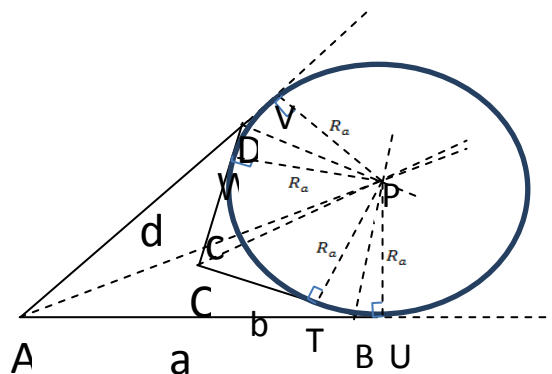
$$\angle ICE = \angle GCE,$$

Sehingga CE garis bisektor $\angle KCJ$. Dengan demikian terbukti bahwa AE, BE, CE, DE, EJ dan EK kongkurensi. \blacksquare

Jari-jari Lingkaran Singgung Luar Segiempat

Untuk menentukan panjang jari – jari lingkaran luar segiempat tidak konveks dapat dihubungkan dengan luas segiempat. Diberikan sebuah segiempat tidak konveks $ABCD$ dengan sepanjang dengan panjang $AB = a, BC = b, CD = c$ dan $DA = d$.

Bukti: Perhatikan Gambar 12



Gambar 12. Lingkaran Singgung dengan Jari-jar iR_a

$$L\Box ABCD = L\Delta ABP + L\Delta ADP - L\Delta BCP - L\Delta CDP \quad (13)$$

$$L\Box ABCD = \frac{1}{2}R_a(a + d - b - c),$$

$$R_a = \frac{2L\square ABCD}{a - c + d - b}$$

dan karena $a + b = c + d$ diperoleh

$$R_a = \frac{L\square ABCD}{a - c} = \frac{L\square ABCD}{d - b}.$$

■

KESIMPULAN

Mengkonstruksikan lingkaran singgung tidak hanya dapat dilakukan pada segitiga dan segiempat konveks saja melainkan dapat juga dilakukan pada segiempat tidak konveks. Serta panjang jari – jari lingkaran luar segiempat tidak konveks dapat dihubungkan dengan luas segiempat tidak konveks $ABCD$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H.S.M.Coxeter dan S.L.Greitzer., *Geometry Revisited*, MAA, Washington D C. 1967.
- [2] J. Martin., More Characterizations of Tangential Quadrilaterals, *Forum geometricorum*, Departement of mathematical science Florida Atlantik University, Boca Raton. 2011,
- [3]J. Martin., Similiar Metric Characterization of Tangential and Extangential Quadrilateral, *Forum geometricorum*, Departement of mathematical science Florida Atlantik University, Boca Raton. 2012,
- [4] Mashadi., *Geometri*, Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru. 2012,
- [5] M. Nicusor., Characterizations of a Tangential Quadrilateral, *Forum geometricorum*, Departement of mathematical science Florida Atlantik University, Boca Raton. 2009
- [6] Singgih S Wibowo., *Matematika Menongsong OSN SMP*, Intersolusi Pressindo, Yogyakarta. 2011.
- [7] Weisstein, Eric W. “Urquhart’s Theorem.”., From mathworld-A Wolfram web resource <http://mathworld.wolfram.com/UrquhartsTheorem.html>