Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, Januari 2015
ISSN 2460 - 4542

Invers Drazin Dari Matriks Sirkulan

Fitri Aryani[1], Lusi Andari[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id,lusiandari168@yahoo.co.id

ABSTRAK

Invers Drazin merupakan salah satu jenis invers yang diperumum. Invers Drazin hanya akan terdefinisi untuk matriks bujur sangkar. Selanjutnya invers Drazin harus memenuhi tiga syarat untuk menjadi sebuah invers dari matriks C. Pembahasan pada makalah ini bertujuan untuk menentukan invers Drazin dari matriks Sirkulan. Matriks Sirkulan merupakan matriks bujur sangkar yang khusus dan unik. Matriks Sirkulan dengan $\det(C) = 0$ mempunyai invers Drazin yang dituliskan dengan C^D. Invers Drazin ditentukan dengan menggunakan metode matriks kanonik Jordan. Invers tersebut dapat dicari dengan menentukan matriks Modal M dan matriks kanonik Jordan J dari matriks C. Matriks Modal M merupakan matriks yang terbentuk dari vektor – vektor eigen yang diperumum x_m sedangkan matriks kanonik Jordan J merupakan matriks yang diagonal utamanya terbentuk dari matriks blok Jordan $J_k(\lambda)$. Selanjutnya dari kedua matriks tersebut dapat digunakan untuk menentukan invers Drazin C^D dari matriks C. Berdasarkan hasil yang diperoleh, invers Drazin C^D tersebut memenuhi tiga syarat dari invers Drazin sehingga invers Drazin C^D merupakan invers dari matriks C.

Kata kunci :Invers Drazin, Matriks Kanonik Jordan, Matriks Blok Jordan, Matriks Sirkulan

ABSTRACT

Drazin inverse is one type of generalized inverse. The Drazin inverse will only be defined for square matrices. Next, Drazin inverse must satisfy three conditions to become inverse of matrix C. In the paper to determine Drazin inverse of Circulant matrix. Circulant matrix is square matrix specialty and unique. Circulant matrix with $det(C) = 0$ has a Drazin inverse and denoted by C^D. This inverse can be obtained by specifying a Modal matrix M and Jordan canonical matrix J of matrix C. Modal matrix M is a matrix where its colums consisting of generalized eigen vectors x_m while the Jordan canonical matrix J is a matrix which entries on its main diagonal consisting of Jordan block matrix $J_k(\lambda)$. Next, two matrices were used to determine Drazin inverse C^D of matrix C. Based on results obtained Drazin inverse C^D has satisfied three conditions of Drazin inverse such that Drazin inverse C^D is inverse of matrix C.

***Keywords** : Drazin Inverse, Jordan Canonical Matrix, Jordan Block Matrix, Circulant Matrix*

PENDAHULUAN

Teori matriks merupakan pembahasan yang penting dalam ilmu matematika pada aljabar linier. Dalam teori matriks terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya matriks Teoplitz. Matriks Teoplitz pada dasarnya mempunyai operasi sama dengan matriks biasa hanya saja pada matriks Teoplitz mempunyai struktur dan sifat yang khusus [17]. Menurut Robert (2005) matriks Teoplitz adalah matriks simetris yang sirkulan dimana setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada superdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Ada beberapa jenis dari matriks Teoplitz yaitu matriks Teoplitz Tridiagonal, matriks Sirkulan, dan masih banyak lagi jenis-jenis dari matriks Teoplitz. Pembahasan makalah ini terpusat hanya pada matriks sirkulan.

Sebuahmatriks dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika matriks tersebut nonsingular dan bujur sangkar dengan n baris dan n kolom atau dengan kata lain jika kolom-kolom atau baris-barisnya bebas linier. Invers dari suatu matriks yang diperumum mempunyai sifat-sifat invers dari suatu matriks, namun tidak harus semua sifat terpenuhi. Ada beberapa jenis invers matriks yang diperumum diantaranya yaitu invers kiri dan invers kanan (invers satu sisi), invers Drazin, invers grup, invers Bott-Duffin, dan invers Moore-Penrose [11]. Invers yang digunakan pada makalah ini adalah invers Drazin.

Invers Drazin pertama kali dikenalkan oleh Michael P Drazin pada tahun 1958 [11]. Invers Drazin dari matriks A dituliskan dengan A^D. Ada beberapa metode yang digunakan untuk menentukan invers Drazin dari suatu matriks diantaranya yaitu dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan, metode Leverrier Faddeev, dan metode semi interative tipe BI-CG. Invers Drazin ini dapat diaplikasikan pada beberapa bidang, diantaranya yaitu konvergensi asimtotik semigrup operator, sistem persamaan differensial linier, rantai Markov, kriptografi, multibody sistem dinamik, dan metode numerik. Pada penulisan ini akan dibahas penentuan invers Drazin dari matriks Sirkulan (4 x 4) dengan menggunakan matriks kanonik Jordan.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian dalam makalah ini adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Sirkulan,
$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$
2. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Sirkulan.
3. Menentukan matriks transformasi linier dari matriks Sirkulan.
4. Membentuk matriks dalam bentuk kanonik Jordan.
5. Setelah terbentuk matriks dalam bentuk kanonik Jordan maka akan ditentukan matriks Modal dari basis kanonik.
6. Setelah matriks bentuk kanonik Jordan dan matriks Modal terbentuk maka akan digunakan untuk menentukan invers Drazin dari matriks Sirkulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan secara umum langkah-langkah untuk menentukan invers Drazin dari matriks Sirkulan yang berordo $4\ x\ 4$ yaitu sebagai berikut.

1. Matriks $C_{4\,x\,4} = \begin{bmatrix} c_0 c_1 c_2 c_3 \\ c_3 c_0 c_1 c_2 \\ c_2 c_3 c_0 c_1 \\ c_1 c_2 c_3 c_0 \end{bmatrix}$.
2. Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks $C_{4\,x\,4}$ dengan $det(\lambda I - C) = 0$ sehingga diperlukan λ_1, λ_2, λ_3 dan λ_4.
3. Untuk menentukan vektor eigen yang diperumum maka terlebih dahulu harus mencari *rank* dari $(C - \lambda I)^m$ setiap nilai eigenλ dari matriks tersebut.
4. Selanjutnya akan dicari ρ_m untuk menentukan jumlah vektor eigen yang diperumum dari setiap nilai eigen λ.
5. Kemudian harus memenuhi dua kondisi untuk mendapatkan vektor eigen yang diperumum dengan tipe m, maka dua kondisi tersebut yaitu:
   a) $(C - \lambda I)^m x_m = 0$.
   b) $(C - \lambda I)^{m-1} x_m \neq 0$.
6. Maka didapatkan vektor eigen yang diperumum $w_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, $y_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, dan $z_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$.
7. Selanjutnya akan ditentukan transformasi linier T, dengan $T(w_1) = \lambda_1 w_1$, $T(x_1) = \lambda_2 x_1$, $T(y_1) = \lambda_3 y_1$, dan $T(z_1) = \lambda_3 z_1$.
8. Sehingga didapatkan matriks transformasi linier T yang bersesuaian dengan basis B yang dilambangkan dengan G, $G = [T(w_1) \quad T(x_1) \quad T(y_1) \quad T(z_1)]$.
9. Selanjutnya akan ditentukan matriks Modal M yang terbentuk dari vektor-vektor eigen yang diperumum dengan $M = [w_1 \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1]$ dan juga akan dicari invers dari matriks Modal yang dinotasikan M^{-1} .
10. Kemudian akan ditentukan matriks bentuk kanonik Jordan dengan $J = M^{-1}CM$.
11. Setelah itu, akan dibentuk matriks-matriks blok Jordan $J_k(\lambda)$ maka diperoleh $J_1(\lambda_1)$, $J_2(\lambda_2)$ dan $J_3(\lambda_3)$.
12. Kemudian akan dicari invers dari matriks blok Jordan $\left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1}$ dengan $[J_1(\lambda_1)]^{-1}$, $[J_2(\lambda_2)]^{-1}$ dan $[J_3(\lambda_3)]^{-1}$.
13. Selanjutnya akan dicari invers Drazin dari matriks tersebut dengan $C^D = M\left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} M^{-1}$.
14. Kemudian C^D harus memenuhi tiga syarat untuk menjadi sebuah invers dari matriks tersebut[5]. Tiga syarat tersebut yaitu:
    a) $CC^D = C^D C$.
    b) $C^D C C^D = C^D$.
    c) $C^{k+1} C^D = C^k$.

Berikut diberikan contoh untuk menentukan invers Drazin untuk matriks Sirkulan yang berordo $4 \, x \, 4$ yaitu:

Contoh 1 Diberikan matriks$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:
Langkah pertama adalah menentukan nilai eigen dari matriks Sirkulan dengan persamaan $det(\lambda I - C) = 0$ maka diperoleh nilai eigen dari matriks C adalah $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4,$ dan $\lambda_3 = \lambda_4 = 2.$ Untuk memperoleh vektor eigen yang diperumum terlebih dahulu mencari *rank* dari $(C - \lambda I)^m$ dengan $m = 1, 2, \ldots$ untuk setiap nilai eigen. Selanjutnya akan dicari nomor indeks yang terkait dengan *rank* untuk setiap nilai eigen.

1) Untuk$\lambda = 0$, maka:

$$C - 0I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C - 0I$ mempunyai *rank* 3. Selanjutnya akan ditentukan *rank*$(C - 0I)^2$.

$$(C - 0I)^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 20 & -16 & -4 \\ 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 0I)^2$ mempunyai *rank* 3.

Disebabkan $rank(C - 0I)$ dengan $rank(C - 0I)^2$ bernilai sama maka pencarian $rank(C - 0I)^m$ berhenti. Sehingga nomor indeks terkait dengan *rank* adalah

$$\begin{aligned} \rho_1 &= rank((C - \lambda I)^0) - rank((C - \lambda I)^1) \\ &= rank((C)^0) - rank((C)^1) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \\ \rho_2 &= rank((C - \lambda I)^1) - rank((C - \lambda I)^2) \\ &= rank((C)^1) - rank((C)^2) \\ &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $\lambda = 0$, pada tipe 1 terdapat 1 vektor eigen yang diperumum, dan tidak terdapat vektor eigen yang diperumum pada tipe 2, tipe 3 dan tipe selanjutnya. Vektor eigen pada tipe 1 harus memenuhi dua kondisi $(C)w_1 = 0$ dan $(C)^0 w_1 \neq 0$, Jika diberikan $w_1 = [a \quad b \quad c \quad d]^T$maka:

$$w_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

2) Untuk $\lambda = 4$, maka:

$$(C - 4\,I) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 4\,I)$ mempunyai *rank* 3. Selanjutnya akan ditentukan *rank* $(C - 4\,I)^2$.

$$(C - 4\,I)^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 20 & -16 & -4 \\ 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 4\,I)^2$ mempunyai *rank* 3.

Disebabkan $rank(C - 4I)$ dengan $rank(C - 4I)^2$ bernilai sama maka pencarian $rank(C - 4I)^m$ berhenti. Sehingga nomor indeks terkait dengan *rank* adalah

$$\begin{aligned} \rho_1 &= rank((C - \lambda I)^0) - rank((C - \lambda I)^1) \\ &= rank((C - 4I)^0) - rank((C - 4I)^1) \\ &= 4 - 3 \end{aligned}$$

$$= 1$$
$$\rho_2 = rank\,((C - \lambda I)^1) - rank\,((C - \lambda I)^2)$$
$$= rank((C - 4I)^1) - rank((C - 4I)^2)$$
$$= 3 - 3$$
$$= 0$$

Untuk $\lambda = 4$, pada tipe 1 terdapat 1 vektor eigen yang diperumum, dan tidak terdapat vektor eigen yang diperumum pada tipe 2, tipe 3 dan tipe selanjutnya. Vektor eigen pada tipe 1 harus memenuhi dua kondisi $(C - 4I)x_1 = 0$ dan $(C - 4I)^0 x_1 \neq 0$, Jika diberikan $x_1 = [a \quad b \quad c \quad d]^T$maka:
$x_1 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$

3) Untuk $\lambda = 2$, maka:

$$(C - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 2I)$ mempunyai *rank* 2. Selanjutnya akan ditentukan *rank*$(C - 2\,I)^2$.

$$(C - 2\,I)^2 = \begin{bmatrix} 2020 \\ 0202 \\ 0000 \\ 0000 \end{bmatrix}$$

$(C - 2\,I)^2$ mempuyai *rank* 2.

Disebabkan *rank*$(C - 2I)$ dengan *rank*$(C - 2I)^2$ bernilai sama maka pencarian *rank*$(C - 2I)^m$ berhenti. Sehingga nomor indeks terkait dengan *rank* adalah

$$\rho_1 = rank((C - \lambda I)^0) - rank((C - \lambda I)^1)$$
$$= rank((C - 2I)^0) - rank((C - 2I)^1)$$
$$= 4 - 2$$
$$= 2$$
$$\rho_2 = rank((C - \lambda I)^1) - rank((C - \lambda I)^2)$$
$$= rank((C - 2I)^1) - rank((C - 2I)^2)$$
$$= 2 - 2$$
$$= 0$$

Untuk $\lambda = 2$, pada tipe 1 terdapat 2 vektor eigen yang diperumum, dan tidak terdapat vektor eigen yang diperumum pada tipe 2, tipe 3 dan tipe selanjutnya. Vektor eigen pada tipe 1 harus memenuhi dua kondisi $(C - 2I)y_1 = 0$ dan $(C - 2I)^0 y_1 \neq 0$, maka:
$y_1 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T$ dan $z_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$

Selanjutnya akan ditentukan matriks transformasi linier, maka: Misalkan $P =$ Rentang $\{w_1\}$, $Q =$ Rentang $\{x_1\}$, dan $R =$ Rentang $\{y_1, z_1\}$, maka P, Q, dan R adalah subruang *invariant* dibawah T atau dibawah C (matriks transformasi linier T), sehingga basis untuk R^4 adalah
$B = P \cup Q \cup R = \{w_1, x_1, y_1, z_1\}$.
Sehingga diperoleh,

$$T(w_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$T(x_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$T(y_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$T(z_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_B$$

Jadi, matriks transformasi linier T yang bersesuaian dengan basis B adalah

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai basis kanonik dari vektor eigen yang diperumum untuk matriks Cyang berordo$4\ x\ 4$ yang disebut matriks Modal. Basis-basis vektor eigen yang diperumum $w_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, x_1 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T, y_1 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T$, dan$z_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$ sehingga

$$M = [w_1 \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari invers dari matriks Modal yang dinotasikan dengan M^{-1}, dengan menggunakan matriks yang diperbesar $[M\ |I]$ dengan Operasi Baris Elementer (OBE) yang akan membentuk $[I\ |M^{-1}]$ maka diperoleh invers dari matriks Modal yaitu:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks bentuk kanonik Jordan dari matriks Cyang berordo $4\ x\ 4$maka diperoleh:

$$J = M^{-1}CM$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks G merupakan matriks bentuk kanonik Jordan dimana matriks – matriks blok Jordannya adalah

$$J_1(\lambda_1) = J_1(0) = [0]$$

$$J_2(\lambda_2) = J_2(4) = [4]$$

$$J_3(\lambda_3) = J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan invers Drazin dari matriks C yang berordo $4\ x\ 4$, maka akan ditentukan terlebih dahulu invers dari matriks blok Jordan yaitu:

$$[J_1(0)]^{-1} = [0]$$

$$[J_2(4)]^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$[J_3(2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sehingga, invers Drazin untuk matriks C dengan menggunakan Persamaan (2.32), yaitu:

$$C^D = M\left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat diperoleh kesimpulan, yaitu

1. Matriks Sirkulan yang berordo $4\ x\ 4$ dengan $\det(C_{4\,x\,4}) = 0$ mempunyai invers yaitu invers Drazin (C^D). C^D dapat dicari dengan menentukan matriks Modal $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks kanonik Jordan $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Matriks Modal M yang diperumum merupakan matriks yang terbentuk dari vektor - vektor eigen yang diperumum dari matriks C. Sedangkan matriks kanonik Jordan J merupakan matriks yang diagonal utamanya terbentuk dari matriks blok Jordan$J_k(\lambda)$. Kemudian dua matriks tersebut digunakan untuk menentukan invers Drazin dari matriks Sirkulan. Invers Drazin dari matriks Sirkulan yang berordo $4\ x\ 4$ yaitu
$$C^D = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}.$$
2. Invers Drazin C^D harus memenuhi syarat yang telah ditentukanagar menjadi sebuah invers. Invers Drazin C^D yang telah didapatkan sesuai dengan pembahasan telah dibukti bahwa C^D telah memenuhi semua syarat yang telah ditentukan sebelumnya sehingga dapat dikatakan C^D sebagai C^{-1} dari matriks C.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard & Chriss Rorres.. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan.* Erlangga2004. Jakarta.

[2] Bashi, Mustafa & Sulayman Solak.. *On The Circulant Matrices with Arithmetic Sequence.* Vol. 5. No. 25. Hal. 1213-1222. Departement of Mathematics Education. Selcuk University. 2010Meram Yeniyol. Konya-Turkey.

[3] Ben-Israel, et.al.. *Generalized Inverses Theory and Aplications* Second Edition. Springer-Verlag2003. New York.

[4] Bronson, Ricard dan Gabriel B. Costa.. *Linier Algebra An Introduction*. Second Edition. Elsevier Inc2007. Amsterdam.

[5] Campbell, Stephen L. dkk.. *Aplication of Drazin Inverse to Linear System of Diferential Equations with Singular Constant Coefficient*1976. Vol. 31. No. 3. hal. 411-425. SIAM J. Appl. Math.

[6] Cline, Randall E. & T. N. E. Greville.. *A Drazin Inverse for Rectangular Matrices*. *Linear Algebra And Its Applications* 29. hal. 53-62. Mathematics Departement and the Computing Center. University of Tennesse1980. Knoxville. Tennesse.

[7] Ekowati, Rina Martini.. *Sifat Dasar Matriks Circulant*. Program Studi Matematika FMIPA. Universitas Diponegoro1995. Semarang. Indonesia.

[8] Gazali, Wikaria. *Matriks dan Transformasi Linier*. Graha Ilmu2005. Yogyakarta.

[9] Gray, Robert M.. *Toeplitz and Circulant Matrices*. Stanfoerd 94305. Department of Electrical Engineering Stanford University 2001. USA.

[10] J. J. Koliha. *A Generalized Drazin Inverse.* Glasgow Math. J. 38, hal. 367-381. Departement of Mathematics. University of Merbourne. Victoria1995. Australia.

[11] Khasanah, Lisnilwati & Bambang Irawanto. *Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular.* Vol. 14. No. 3. hal. 137-142. Program Studi Matematika FMIPA. Universitas Diponegoro2011. Semarang. Indonesia.

[12] Kwuk, et. al.. *Linier Algebra*. Second Edition. Springer-Verlag 2004. New York.

[13] Li, Xiezhang & Yimin Wei. *A Note on The Representations for The Drazin Invers 2 □ 2Block Matrices.* Linear Algebra And Its Applications 423.2007 hal. 332-338. Elsevier Inc. Amsterdam.

[14] Lipschutz, Seymour & Marc Lars Lipson. *Schaum's OutlinesTeori dan Soal Aljabar Linier Edisi Ketiga*. Erlangga2004. Jakatra.

[15] Santoso, R. Gunawan.. *Aljabar Linier Dasar.* CV. Andi Offset2009. Yogyakarta.

[16] Sibarani, Maslen. 2013. *Aljabar Linier*. PT Raja Grafindo Persada2013. Jakarta.

[17] Siregar, Bakti dkk. *Invers suatu Matriks Teoplitz Menggunakan Metode Adjoin*. Vol. 02. No. 01. hal. 85-94. University of Sumatera Utara2014. Medan. Indonesia.