Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 2, Juli 2015
ISSN 2460 - 4542

Perbandingan Estimasi Parameter Pada Distribusi Eksponensial Dengan Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood* Dan Metode Bayesian

Rado Yendra[1] , Elsa Tria Noviadi[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: penulis1@uin-suska.ac.id, penulis2@uin-suska.ac.id
[3] Jurusan Matematika, Fakultas Teknik, Universitas Riau
Jl. HR Subantas KM 12,5, KampusBinaWidya, SimpangBaru, Pekanbaru, Riau 28293
Email: penulis3@unri.ac.id

ABSTRAK

Perbandingan mengestimasi parameter distribusi eksponensial dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian telah dilakukan pada penelitian ini. Pada hasil penelitian ini terhadap 20 data gempa bumi yang telah dihasilkan suatu nilai estimasi parameter untuk data yang diberikan yaitu pada metode maksimum *likelihood* $\hat{\theta} = 0{,}00207619$ dan metode Bayesian $\hat{\theta} = 0{,}00220057$. Dengan menggunakan uji kelayakan AIC dari parameter tersebut dapat disimpulkan bahwa metode maksimum *likelihood* lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter dari pada metode bayesian.

Katakunci: distribusi eksponensial, metode maksimum *likelihood*, metode bayesian, AIC

ABSTRACT

The Comparison of Parameter estimation at exponential distribution using the maximum likelihood method and Bayesian methods had been carried out in this research. In the result of this research on 20 earthquake data that had generated the parameter estimation value to provided data namely at maximum likelihood method θ =0,00207619 and Bayesian methods θ =0,00220057. By using AIC feasibility test from this parameters culd be concluded that of likelihood maximum method was better to estimate the parameters than bayesian method.

Keywords*: exponential distribution, the maximum likelihood method, bayesian method, AIC*

Pendahuluan

1. Estimasi Parameter

Estimasi merupakan proses yang digunakan untuk menghasilkan suatu nilai tertentu terhadap suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter ini merupakan suatu sampel, yang pada perkembangannya akan digunakan oleh suatu estimator untuk menghasilkan suatu nilai parameter.

Estimasi parameter pada mulanya akan digunakan untuk menduga suatu populasi dari sampel. Estimasi digolongkan menjadi dua yaitu estimasi titik dan estimasi parameter. Estimasi merupakan suatu tahapan yang terpenting dalam menentukan model peluang yang tepat dari sekumpulan data.

Estimasi parameter dapat dilakukan dengan beberapa metode, diantara metode tersebut adalah metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian. Metode maksimum *likelihood* adalah yang paling popular atau yang paling sering digunakan dalam penelitian. Hal ini dikarenakan metode tersebut sangat berhubungan dengan kemampuan numerik, terutama dalam menghasilkan titik penyelesaian dalam suatu persamaan.

Metode bayesian merupakan metode lain yang telah mendapatkan tempat pada para peneliti dalam mengestimasi parameter suatu distribusi. Metode ini sangat baik digunakan terutama bagi fungsi distribusi yang sangat rumit, atau dengan kata lain parameter yang dimiliki oleh fungsi distribusi tersebut lebih dari dua parameter.

2. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada Tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan Abad 19 (Gompertz-Verhulst) untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk.

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi yang banyak digunakan dalam statistika. Pada akhir Tahun 1940, peneliti telah memulai untuk memilih distribusi eksponensial dalam menggambarkan pola kehidupan elektronik. Distribusi eksponensial dalam penelitian tersebut mempunyai ciri-ciri oleh nilai bahaya berupa konstan θ, dan nilai θ pada penelitian ini merupakan suatu parameter. Nilai θ yang tinggi mengindikasikan tinggi resiko, dan survival yang singkat, nilai θ yang rendah mengindikasikan resiko rendah dan survival yang lama. Ketika $\theta = 1$ distribusi dipandang sebagai distribusi eksponensial satuan.

Suatu densitas peluang dikatakan distribusi eksponensial dengan satu parameter $X \sim Exp(\theta)$, jika distribusi tersebut mempunyai fungsi kepadatan peluang yaitu:

$$f(x) = \theta e^{-x\theta} \tag{1}$$

Fungsi kepadatan peluang tersebut adalah distribusi oleh beberapa teori yang menyebabkan fungsi densitas kepadatan peluang tersebut dapat digunakan dalam suatu penelitian. Teori-teori yang mengikuti fungsi kepadatan peluang tersebut diantaranya adalah distribusi fungsi, rata-rata fungsi kepadatan peluang, dan variasi fungsi kepadatan peluang. Untuk kerja teori tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Distribusi Fungsi Kepadatan Eksponensial

Untuk membuktikan distribusi fungsi kepadatan peluang eksponensial maka harus dibuktikan sama dengan (=) 1.

$$f(x) = \theta e^{-x\theta} \quad , x > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2}$$

Dari hasil diatas dapat dikatakan fungsi kepadatan peluang eksponensial sama dengan satu (1).

Rata-Rata Fungsi Kepadatan Peluang Eksponensial

Dicari rata-rata fungsi kepadatan peluang eksponensial dengan fungsi sebagai berikut :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta}$$

dengan cara mengintegralkan fungsi f(x) dengan dikalikan x maka didapat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\ \theta e^{-x\theta}dx \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\theta}$$

Dari hasil diatas didapat rata-rata fungsi kepadatan peluang eksponensial yaitu $E(x) = \frac{1}{\theta}$.

Variansi Fungsi Kepadatan Peluang Eksponensial

Untuk mencari nilai variasi peneliti menggunakan rumus sebagai berikut :

$$V(x) = \left(E(x^2)\right) - \left(E(x)\right)^2$$

dengan :

$$\left(E(x^2)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \quad \left(E(x)\right)^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2$$

maka dapat diselesaikan nilai variansi untuk fungsi kepadatan eksponensial adalah

$$V(x) = \left(E(x^2)\right) - (E(x))^2$$
$$V(x) = \frac{1}{\theta^2} \tag{4}$$

Didapatlah nilai variansi fungsi kepadatan peluang eksponensial yaitu $V(x) = \frac{1}{\theta^2}$.

3. Distribusi Gamma

Menurut Hogg and Tanis Distribusi Gamma merupakan salah satu dari keluarga distribusi eksponensial. Peubah acak θ dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter β dan α jika dan hanya jika fungsi kepadatan densitasnya berbentuk:

$$f(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} \tag{5}$$

Fungsi kepadatan peluang tersebut adalah distribusi oleh beberapa teori yang menyebabkan fungsi densitas kepadatan peluang tersebut dapat digunakan dalam suatu penelitian. Teori-teori yang mengikuti fungsi kepadatan peluang tersebut diantaranya adalah distribusi fungsi, rata-rata fungsi kepadatan peluang, dan variasi fungsi kepadatan peluang. Untuk kerja teori tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Distribusi Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Untuk membuktikan distribusi fungsi kepadatan peluang eksponensial maka harus dibuktikan sama dengan (=) 1.

$$f(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)d\theta = 1 \tag{6}$$

Dari hasil diatas dapat dibuktikan fungsi kepadatan peluang gamma sama dengan satu (1).

Rata-Rata Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Dicari rata-rata fungsi kepadatan peluang gamma dengan fungsi sebagai berikut :

$$f(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}$$

dengan cara mengintegralkan fungsi $f(\theta)$ dengan dikalikan θ maka didapat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta)d\theta = \frac{\alpha}{\beta} \tag{7}$$

Dari hasil diatas didapat rata-rata fungsi kepadatan peluang gamma yaitu $E(\theta) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Variansi Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Untuk mencari nilai variasi peneliti menggunakan rumus sebagai berikut :

$$V(\theta) = \left(E(\theta^2)\right) - (E(\theta))^2$$

dengan :

$\left(E(\theta^2)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 f(\theta)d\theta$ $\left(E(\theta)\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ maka dapat diselesaikan nilai variansi untuk fungsi kepadatan gamma adalah

$$V(\theta) = \frac{1}{\alpha\beta^2} \tag{8}$$

Didapatlah nilai variansi fungsi kepadatan peluang gamma yaitu $V(x) = \frac{1}{\alpha\beta^2}$.

4. Metode Maksimum *Likelihood*

Fungsi *Likelihood*

Fungsi *likelihood* $L(\theta|\underline{x})$ secara aljabar sama seperti fungsi kepadatan peluang bersama $f(x|\theta)$ tetapi berbeda didalam pertukaran notasi lansung pada penekanan dari variabel acak x terhadap θ yang tetap, kepada penekanan θ terhadap x.

Fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak $x_1, x_2, \cdots, x_n$: yaitu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ yang dievalusi pada titik $x_1, x_2, \cdots, x_n$ disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta|\underline{x})$, maka :

$$L(\theta|\underline{x}) = f(x|\theta) \tag{9}$$

kerena $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$, adalah fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak yang saling bebas sehingga :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \tag{10}$$

selanjutnya Persamaan (9) disubstitusikan ke Persamaan (10) adalah :

$$L(\theta|\underline{x}) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \tag{11}$$

Estimasi Maksimum *Likelihood*

Fungsi *likelihood* pada Persamaan (11) adalah sebuah fungsi parameter θ yang tidak diketahui. Estimasi maksimum *likelihood* θ adalah suatu nilai $\hat{\theta}$ yang akan memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\theta|\underline{x})$ sehingga $L(\hat{\theta}|\underline{x}) \geq L(\theta|\underline{x})$. Untuk $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\theta|\underline{x})$ maka $\hat{\theta}$ juga akan maksimum.

Metode estimasi maksimum *likelihood* dapat dipakai bila fungsi kepadatan peluang atau distribusi dari variabel acak diketahui. Dalam menggunakan metode estimasi maksimum *likelihood* tersebut, maka harus diketahui langkah-langkah atau cara kerja pada estimasi maksimum *likelihood*.

Cara kerja estimasi maksimum *likelihood*, misalkan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(x|\theta)$ dari sini dibentuk fungsi kepadatan peluang bersama $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dan dilanjutkan dengan menentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta|\underline{x})$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* bekerja mencari statistik sampel yang membuat fungsi *likelihood* $L(\theta|\underline{x})$ menjadi maksimum, dalam hal ini digunakan *newton-raphson* sebagai berikut :

1. Menentukan calon nilai maksimum lewat $\frac{dL(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0$
2. Calon nilai maksimum yang diperoleh akan menjadi nilai maksimum jika $\frac{d^2L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2} < 0$.

Untuk menghindari kesulitan menunjukkan dalam uji turunan kedua, maka digunakan *newton-raphson*, dikarenakan *newton-raphson* adalah fungsi yang monoton, sehingga *newton-raphson likelihood* dilambangkan dengan $\ln L(\theta|\underline{x}) = l(\theta|\underline{x})$, dimana $l(\hat{\theta}|\underline{x}) \geq l(\theta|\underline{x})$ dengan menggunakan *newton-raphson* $L(\theta|\underline{x})$ maka estimator *likelihood* adalah lansung diperoleh dari $\frac{dl(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0$.

5. Metode Bayesian

Bayesian merupakan suatu metode yang memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan informasi awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior. Sedangkan penentuan parameter distribusi prior dalam penelitian ini telah ditetapkan menggunakan distribusi Gamma. Selanjutnya, maka diperolehlah informasi posterior (distribusi posterior) yang merupakan gabungan dari dua sumber informasi mengenai parameter dari model statistik yaitu, *likelihood* dari distribusi sampel dan informasi awal (distribusi prior). Hasil yang dinyatakan dalam bentuk distribusi posterior yang kemudian menjadi dasar dalam metode bayesian.

Penjelasan tentang distribusi prior dan distribusi posterior adalah sebagai berikut :

Distribusi Prior

Dalam inferensi bayes, parameter θ diperlakukan sebagai variabel, maka akan mempunyai nilai dalam sebuah domain dengan densitas $f(\theta)$, dan densitas inilah yang akan dinamakan sebagai distribusi prior dari θ, dengan adanya informasi prior ini maka akan kombinasikan dengan data sampel yang digunakan dalam membentuk posterior.

Apabila suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter di dalamnya, misalkan parameter θ, maka parameter θ itu sendiri juga mengikuti suatu distribusi probabilitas tertentu yang disebut sebagai distribusi prior. Distribusi prior dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, sehingga dituliskan:

$$\theta \sim \pi(\theta). \tag{12}$$

Distribusi Posterior

Distribusi posterior adalah fungsi densitas bersyarat θ jika diketahui nilai observasi x. Pada metode bayesian, inferensi dilandaskan pada distribusi posterior. Sehingga distribusi posterior dinyatakan sebagai berikut :

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto L(\theta|\underline{x})\pi(\theta) \tag{13}$$

dengan:
$\mu(\theta|\underline{x})$: fungsi posterior
$L(\theta|\underline{x})$: fungsi maksimum likelihood
$\pi(\theta)$: fungsi prior

Lambang $\propto$ menyatakan bahwa distribusi posterior proporsional atau sebanding terhadap distribusi prior dikalikan dengan fungsi *likelihood*.

Uji Kelayakan AIC (*Akaike Information Criterion)*

Pemodelan statistik yang melakukan perbandingan terhadap beberapa model, biasanya diikuti dengan uji kebaikan model. Hal ini dilakukan untuk memastikan salah satu model yang terbaik. Beberapa uji kebaikan seperti uji uji *kolmogorov smirnov*, MSE (*Mean Square Eror*) dan nilai AIC (*Akaike Information Criterion*) telah digunakan untuk perbandingan ini. Pada penelitian ini, akan digunakan nilai AIC untuk mendapatkan metode yang terbaik dalam mengestimasi parameter distribusi eksponensial.

Nilai AIC tergantung kepada nilai log *like-lihood* suatu fungsi kepadatan peluang, nilai AIC yang terkenal dapat dijadikan sebagai pedoman untuk menentukan metode yang terbaik dalam mengestimasi parameter. Nilai AIC dapat ditentukan dengan rumus :

$$AIC = -2l + 2p \tag{14}$$

dengan :
l = log *likelihood*
p = jumlah parameter

Metode Penelitian

A. Menentukan Estimasi Parameter dengan Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*

Estimasi parameter distribusi eksponensial dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut :

1. Dapatkan fungsi *likelihood* distribusi eksponensial
2. Dapatkan fungsi log *likelihood* distribusi eksponensial
3. Dapatkan fungsi maksimum log *likelihood* distribusi eksponensial
4. Gunakan metode *newton-raphson* untuk menyelesaikan persamaan yang didapatkan pada no 3.

B. Menetukan Estimasi Parameter dengan Menggunakan Metode Bayesian

Estimasi parameter distribusi eksponensial dengan menggunakan metode Bayesian dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Dapatkan *likelihood* fungsi distribusi eksponensial
2. Dapatkan fungsi distribusi prior
3. Dapatkan fungsi distribusi posterior dengan mengalikan *likelihood* dan distribusi prior
4. Simulasi fungsi distribusi posterior sebanyak 30000 iterasi dengan menggunakan software R
5. Gambarkan fungsi distribusi posterior pada tahap 4
6. Parameter ditentukan dengan nilai peluang tertinggi, pada gambar yang dimiliki.

C. Menetukan Uji Kelayakan dengan Menggunakan AIC (*Akaike Information Criterion*)

Perbandingan parameter dengan menggunkan metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Didapatkan nilai log *likelihood* untuk setiap parameter dari metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian
2. Dapatkan nilai AIC
3. Membandingkan nilai AIC yang terkecil adalah nilai parameter yang terbaik.

Hasil dan Pembahasan

Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial dengan Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*
Fungsi *Likelihood* Distribusi Eksponensial

Sebelum menentukan estimasi maksimum *likelihood* dari distribusi eksponensial, yang harus ditentukan terlebih dahulu adalah menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi eksponensial.

Misalkan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah variabel acak θ adalah parameter, yang saling bebas yaitu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ pada titik $x_1, x_2, \cdots, x_n$ maka fungsi kepadatan peluang bersamanya adalah :
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$
karena $f(x,\theta) = \theta e^{-x\theta}$ maka

$$\begin{aligned} L(\theta|\underline{x}) &= f(x_1|\theta) \times f(x_2|\theta) \times \cdots \times f(x_n|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \\ &= \theta e^{-x_1\theta} \times \theta e^{-x_2\theta} \times \cdots \times \theta e^{-x_n\theta} \\ &= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

Karena $L(\theta|\underline{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ maka fungsi *likelihood* dari distribusi eksponensial adalah $L(\theta|\underline{x}) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi maksimum *likelihood* θ adalah suatu nilai $\hat{\theta}$ yang maksimum fungsi *likelihood* $L(\theta|\underline{x})$ sehingga $(\hat{\theta}|\underline{x}) \geq L(\theta|\underline{x})$. Untuk $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\theta|\underline{x})$ maka $\hat{\theta}$ juga akan maksimum.

Untuk memperoleh estimasi maksimum *likelihood* dari fungsi *likelihood*, maka harus dibentuk suatu persamaan *newton-raphson likelihood* $\ln(L(\theta|\underline{x}))$ dengan notasi $l(\theta|\underline{x})$. Fungsi *newton-raphson likelihood* nya adalah :
$\ln\left(L(\theta|\underline{x})\right) = \ln(\theta^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i\theta})$
dengan menggunakan *newton-raphson* $L(\theta|\underline{x})$, maka estimator *likelihood* lansung diperoleh dari $\frac{dl(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0$.
karena

$$\ln\left(L(\theta|\underline{x})\right) = \ln(\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i})$$

$$\begin{aligned} l(\theta|\underline{x}) &= \ln(\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i}) \\ &= \ln\theta^n + \ln e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ &= n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

untuk
$\frac{dl(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta|\underline{x})}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left[n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\ &= \frac{d}{d\theta} n\ln\theta - \frac{d}{d\theta}\theta \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_1 \end{aligned}$$

$\frac{dl(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0$, maka

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Maka estimasi maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial dengan Menggunakan Metode Bayesian

Distribusi prior dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, sehingga dituliskan $\theta \sim \pi(\theta)$. Distribusi prior ini telah ditetapkan menggunakan fungsi gamma dengan fungsi densitasnya sebagai berikut :

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}$$

Dengan ditetapkannya distribusi prior dengan fungsi densitas gamma maka dapat dilakukan pencarian terhadap distribusi Postarior sebagai berikut :

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto \pi(\theta)L(\theta|\underline{x})$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} \times \theta^{n}e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i\theta}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\sum_{i=1}^{n} x_i\theta+\beta\theta)}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i+\beta)}$$

Maka estimasi Bayesian adalah $\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i+\beta)}$.

Penerapan Contoh Data untuk Estimasi Parameter dengan Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood* dan Metode Bayesian

Berdasarkan tugas akhir ini data yang diambil 20 data gempa bumi diseluruh dunia ini akan digunakan untuk mengaplikasikan metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian, dalam mengestimasi parameter distibusi ekspoensial satu parameter. Data tersebut turut ditampilkan pada Tabel 4.1 berikut:

Tabel 1 20 Data Gempa Bumi di Seluruh Dunia

No	Data (Hari)
1	840
2	157
3	145
4	44
5	33
6	121
7	150
8	280
9	434

10	736
11	584
12	887
13	263
14	1901
15	695
16	294
17	562
18	721
19	76
20	710

Estimasi Parameter dengan Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa $n = 20$ dan $\sum_{i=1}^{n} x_i = 9633$ dengan estimasi untuk maksimum *likelihood* maka didapat :

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\hat{\theta} = \frac{20}{9633}$$

$$\hat{\theta} = 2.07619 \times 10^{-3}$$

$$\hat{\theta} = 0{,}00207619$$

dari nilai parameter diatas, dapat dimasukkan kepada peluang eksponensial :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta}$$

$$f(x) = 0{,}00207619 e^{-(0{,}00207619x)}.$$

Estimasi Parameter dengan Menggunakan Metode Bayesian

Dengan didapatnya fungsi maksimum *likelihood* maka didapat pula sebagai berikut :

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i \theta}$$

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta^{20} e^{(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i)}$$

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta^{20} e^{-(9633\theta)}$$

distribusi prior telah ditetapkan menggunakan fungsi Gamma dari itu diperoleh hasil untuk priornya sebagai berikut :$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}$

$$\pi(\theta) = \frac{4000^{10}\theta^{10-1}e^{-4000\theta}}{\Gamma(10)}$$

$$\pi(\theta) = \frac{4000^{10}\theta^{9}e^{-4000\theta}}{\Gamma(10)}$$

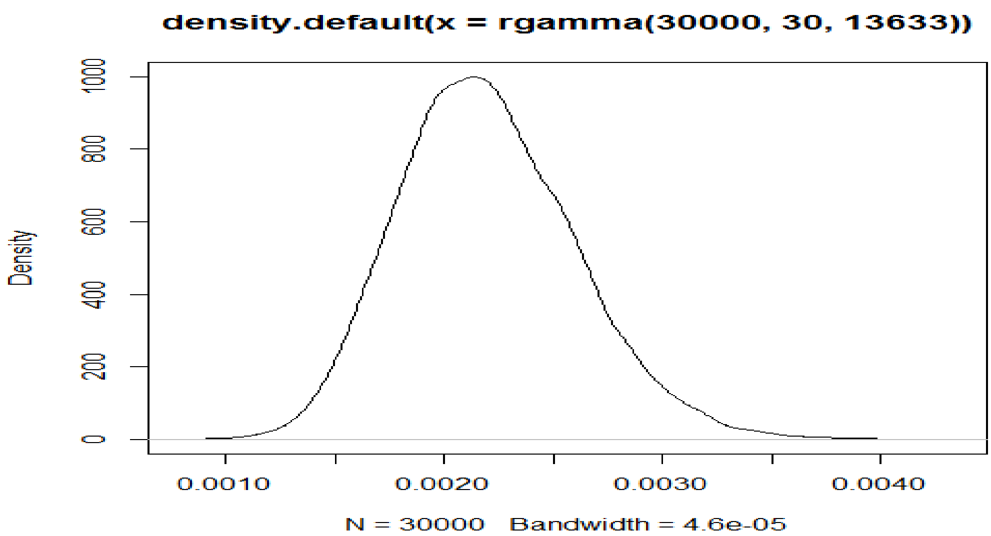
fungsi kepadatan untuk distribusi Postarior dalam data gempa bumi diseluruh dunia adalah

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{4000^{10}}{\Gamma(10)}\theta^{20+10-1}e^{-\theta(9633+4000)}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{4000^{10}}{\Gamma(10)}\theta^{29}e^{-13633\theta}$$

Distribusi Postarior didapat $(\theta|\underline{x})\sim\Gamma(30.13633)$. Dengan menggunakan pemograman R fungsi distribusi posterior tersebut disimulasi sebanyak 3000 iterasi sehingga didapat gambar yang ada pada skripsi tugas akhir ini sebagai berikut :



Gambar 1 Distribusi Posterior terhadap Parameter θ

Dari Gambar 1 didapat hasil parameter untuk $\theta = 0{,}00220057$. Nilai parameter yang dihasilkan oleh metode bayesian dapat dimasukkan kepeluang eksponensial:

$f(x) = \theta e^{-x\theta}$

$f(x) = 0{,}00220057e^{-(0{,}00220057x)}$

Uji Kelayakan Menggunakan AIC (*Akaike Information Criterion*)

Pada penelitian ini telah didapati nilai parameter distribusi eksponensial dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian seperti yang dilampirkan pada Tabel 4.2 :

Tabel 2 Nilai Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial

Metode	Parameter ($\boldsymbol{\theta}$)
Maksimum *Likelihood*	0,00207619
Bayesian	0,00220057

Dari nilai parameter pada Tabel 4.2 dapat dimasukkan kedalam rumus pencarian nilai AIC untuk metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian sebagai berikut :

$$AIC = -2l + 2p$$

$$AIC = -2\left(n \times \ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + 2p$$

$$AIC = -2(20 \times ln(0{,}00207619) - 0{,}00207619 \times 9633) + 2(1)$$

$$AIC = -2(-143{,}5443542) + 2$$

$$AIC = 289{,}088708$$

didapatlah nilai AIC untuk parameter metode maksimum *likelihood* sebesar $289{,}08870884$.

$$AIC = -2l + 2p$$

$$AIC = -2\left(n \times \ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + 2p$$

$$AIC = -2(20 \times ln(0{,}00220057) - 0{,}00220057 \times 9633) + 2(1)$$

$$AIC = -2(-143{,}578868) + 2$$

$$AIC = 289{,}157736$$

didapatlah nilai AIC untuk parameter metode bayesian sebesar $289{,}157736$.

Dari nilai AIC yang didapat untuk masing-masing parameter maka dapat ditampilkan dalam Tabel 3 :

Tabel 3 Nilai AIC untuk Distribusi Eksponensial

Metode	AIC
Maksimum *Likelihood*	289,088708
Bayesian	289,157736

Dari Tabel 3 yang ditampilkan dapat dilihat bahwa metode maksimum *likelihood* memiliki nilai AIC yang lebih kecil dari pada metode bayesian. Oleh karena itu, maka dapat disimpulkan bahwa metode maksimum *likelihood* adalah yang terbaik digunakan untuk mengestimasi parameter distribusi eksponensial.

Kesimpulan

Distribusi eksponensial dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* didapatkan fungsi *likelihood* $L(\theta|\underline{x}) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$ dan untuk fungsi maksimum *likelihood* $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$. Sedangkan dengan menggunakan metode bayesian didapatkan distribusi posteriornya $\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)}$. Pada contoh data perbandingan estimasi parameter distribusi eksponensial dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dan metode bayesian dapat dilakukan dengan baik. Dengan menggunakan maksimum *likelihood* didapatkan nilai estimasi parameter untuk $\hat{\theta} = 0{,}00207619$ sedangkan dengan menggunakan estimasi parameter metode bayesian didapatkan nilai parameter untuk $\hat{\theta} = 0{,}00220057$. Perbandingan dengan menggunakan uji kelayakan AIC dapat disimpulkan bahwa metode maksimum *likelihood* adalah metode yang terbaik untuk mengestimasikan parameter distribusi eksponensial.

Daftar Pustaka

[1] Aulia, Renny dkk. 2011. *"Estimasi Parameter Pada Distribusi Eksponensial". Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 5 (2), 40 – 52.
[2] Boys, R. J. 1997. "*Bayesian Statistick".* Department Of Statistics : University Of Newcastle.
[3] Desvina, Ari Pani dan Marta Erdini. 2012. "*Distribusi Weibull dan Pareto untuk Data Tinggi Gelombang Tsunami Aceh 2004". Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, 09 (02).*
[4] Harinaldi. 2005. "*Prinsip–Prinsip Statistik Untuk Teknik Dan Sains*". Jakarta : Erlangga.
[5] Hazhiah, Indria Tsani dkk. 2012. "*Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes". Media Statistika, 5 (1), 27-35.*
[6] Herhyanto, Nar dan Tuti Gantini. 2009. "*Pengantar Statistika Matematika*". Bandung : Yrama Widya.
[7] Larsen, Richard J dan Morris L Marx. 2006. "*An introduction o Mathematical Statistics And Its Application*". New Jersey : Upper Saddle River.
[8] Ni'mah, Roundlotin dan Arief Agoestanto. 2014. "*Estimator Bayes untuk Rata-Rata Tahan Hidup dari Distribusi Rayleigh pada Data Disensor Tipe II".* UNNES *Journal of Mathematics*, 3 (2).
[9] Nurlaila, Dwi dkk. 2013. "*Perbandingan Metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) dan Metode Bayes Dalam Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial*". *Buletin Ilmiah Mat, Stat, dan Terapan*, 02 (1), 51 – 56.
[10] Rahmatina, Desi. 2012. "*Maksimum Likelihood Estimation (MLE) pada Model Logistik Exponensial*". *Unpad, Jatinangor.*
[11] Ratnawati, Wiwik. "Estimasi Parameter Distribusi Generalized Exponential pada Data Tersensor Tipe III dengan Metode Maximum Likelihood". Universitas Brawijaya.
[12] Ridiani, Feby. "Pendugaan Parameter Distibusi Beta dengan Metode Momen dan Metode Maksimum Likelihood". Jurnal Matematika UNAND, 03 (02),23-28.
[13] Sari, Tia Arum dkk. 2012. "*Estimasi Parameter pada Distribusi Com-poisson dengan Metode Bayesian". Seminar Nasional Matematika.*
[14] Smith, Elizabeth. 2005. "*Bayesian Modelling Of Extreme Rainfall Data*". Disertai Doktor Pada Philosopy University Of Newcastle: Tidak Diterbitkan.
[15] Supranto, J. 2000. "*Statistik Teori Dan Aplikasi Edisi Keenam*". Jakarta: Erlangga.
[16] Yendra, Rado dkk. 2010. " *Analisis Survival dan Program R".* Pekanbaru: Yayasan Pusaka Riau.
[17] Warsono dkk. 2013. "*Identifikasi Karakteristik Harzard Rate Distribusi Gamma Dengan Menggunakan Teorema Glaser". Prosiding Semirata FMIPA Universitas Lampung.*