

Daftar Pustaka

- [1] Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga. 1987.
- [2] Cohen, Fred. *Computer Viruses – Theory and Experiments*. 1984.
- [3] Hale, J. K. dan H. Kocak. *Dynamic Bifurcation*, Springer-Verlag, New York. 1991.
- [4] Hendrawan, Leo. *EC 5010 Keamanan Sistem Informasi*. Tugas Akhir Mahasiswa Institut Teknologi Bandung, Bandung. 2004.
- [5] Lesmana, Risna. *Analisis Dinamik Model Penyebaran Virus Komputer Dengan Intervensi Manusia*. FMIPA, Universitas Brawijaya, Malang. Indonesia.
- [6] Mishra, Bimal Kumar dan Navnit Jha. *SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network*. Applied Mathematical Modelling, 34: 710-715, 2009.
- [7] Muchlis. *Analisis dan Implementasi Pembuatan Virus Multiaction dan Antivirus Menggunakan Metode CRC32*. Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Diponegoro Semarang. Semarang. 2009.
- [8] Piqueira, J.S.C. dan Araujo, V.O. 2009. *A Modified Epidemiological Model for Computer Virus*, Applied Mathematics and Computation, 213: 355-360, 2009.
- [9] Radhianti, Risya. *Simulasi dan Analisa Kestabilan Model Matematika Mengenai Proses Transmisi Virus Dengue di Dalam Tubuh Manusia*. Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung. Bandung: 2012.
- [10] Roni, T. P. *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemic SEIR dengan Kemampuan Infeksi pada Periode Laten, Infeksi dan Sembuh*. Tugas Akhir Mahasiswa Politeknik Negeri Padang. Padang: 2011.
- [11] Sun, C.Y dkk. *Global stability for an special SEIR epidemic model with nonlinier incidence rate*. Mathematical and Computer Modelling, 34:1207-1212, 2009.
- [12] Toutonji, Ossama. A dkk. *Stability analysis of VEISV propagation modeling for network worm attack*. Applied Mathematical Modelling, USA, 36: 2751-2761, 2011.
- [13] Wang, F. Y dkk. *Stability analysis of SEIQV epidemic model for rapid spreadingworms*. Mathematical and Computer Modelling, 29:410-418, 2010.
- [14] Widodo. *Pengantar Model Matematika*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta. 2007.
- [15] Yao, Yu dkk. *Hopf Bifurcation in an Internet Worm Propagation Model With Time Delay in Quarantine*. Mathematical and Computer Modelling, 10: 06-044, 2011.

Lingkaran Singgung Luar Segiempat Konveks

Puteri Januarti¹, Mashadi², Sri Gemawati³

Jurusan Matematika, Fakultas Mipa, Universitas Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: puteri.januarti@gmail.com

ABSTRAK

Tidak semua segiempat dapat dibentuk lingkaran singgung luar yang menyinggung dari perpanjangan keempat sisi. Pada tulisan ini selain dibahas cara mengkonstruksi lingkaran singgung luar segiempat tersebut, dibahas pula syarat dari segiempat yang mempunyai lingkaran singgung itu serta pembuktian kongkurensi dari 6 buah bisektor sudut.

Kata Kunci: Lingkaran singgung luar, segiempat konveks, kongkurensi

ABSTRACT

Not all quadrilaterals from those we can form the excircle tangent that touches the extension of the four sides of the quadrilateral. In this paper we not only discuss how to construct the tangent circle outside the rectangle, but also the terms of a quadrilateral which has the tangent circle and verification concurrency of 6 bisector angles.

Keywords: *Excircle, convex of quadrilateral, concurrency*

Pendahuluan

Lingkaran singgung luar pada segitiga atau yang biasa dikenal dengan *excircle* telah banyak dibahas dalam beberapa buku geometri seperti [1,2,4,5]. Padahal segiempat juga dapat dibuat lingkaran singgung luar. Saat ini baru [3] yang membahas tentang lingkaran singgung luar pada segiempat. Namun yang dibahas oleh [3] adalah tentang beberapa kesamaan rumus antara lingkaran singgung dalam dan luar pada segiempat konveks. Oleh karena itulah pada artikel dibahas pembuktian syarat suatu segiempat yang memiliki lingkaran yang menyinggung semua perpanjangan sisi segiempat cara mengkonstruksinya.

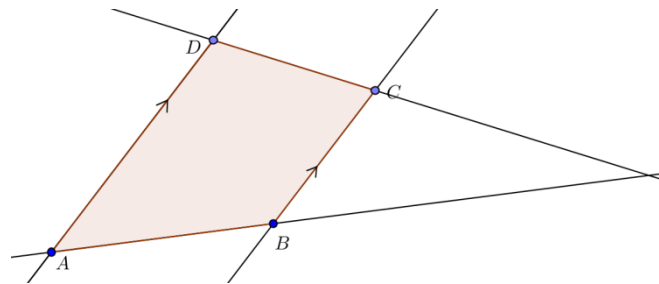
Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menggunakan teorema-teorema yang berlaku pada lingkaran singgung luar segitiga. Baik itu dalam untuk menentukan syarat suatu segiempat memiliki lingkaran singgung luar maupun dalam pengkonstruksian serta kongkurensi dari enam buah bisektor sudut. Hal ini dikarenakan lingkaran singgung luar segiempat merupakan perluasan dari lingkaran singgung luar pada segitiga. Selain menggunakan teorema pada lingkaran singgung luar segitiga, teorema lain yang digunakan yaitu Teorema Urquhats.

Hasil dan Pembahasan

Lingkaran singgung luar segiempat yang dibahas oleh Martin [3] adalah lingkaran yang menyinggung perpanjangan dari keempat sisi segiempat. Tidak semua segiempat konveks dapat dibentuk lingkaran singgung luar tersebut. Oleh sebab itu sebelum mengkonstruksi lingkaran singgung, maka haruslah diketahui syarat dari suatu segiempat yang memiliki lingkaran singgung luar bentuk kedua.

Syarat yang pertama agar suatu segiempat konveks memiliki lingkaran singgung luar yaitu tidak ada sisi yang sejajar. Seperti yang telah dipaparkan pada Bab 1 bahwa lingkaran singgung yang dibahas yaitu lingkaran yang menyinggung perpanjangan dari keempat sisi segiempat. Perhatikan Gambar 1.

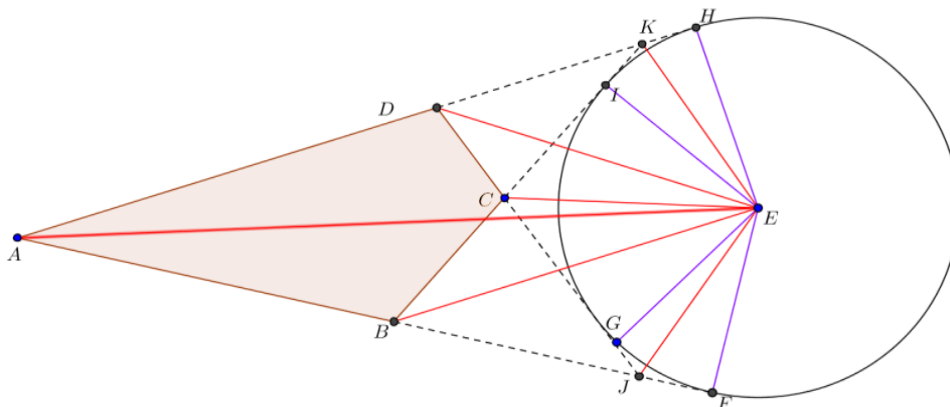


Gambar 1: Segiempat $ABCD$ dengan $AD \parallel BC$

Segiempat $ABCD$ yang memiliki sepasang sisi yang sejajar yaitu $AD \parallel BC$. Jika dibuat perpanjangan dari masing-masing sisi $\square ABCD$ maka sisi yang sejajar tersebut tidak akan pernah berpotongan. Sehingga tidak mungkin dapat dibentuk lingkaran yang menyinggung dari semua perpanjangan sisi $\square ABCD$. Syarat yang kedua yaitu penjumlahan dua sisi yang berdekatan adalah sama [3].

Teorema 1. Suatu $\square ABCD$ dengan panjang sisi $AB = a, BC = d, CD = c$ dan $AD = d$ akan mempunyai lingkaran singgung luar bentuk kedua jika dan hanya jika $a + b = c + d$

Bukti: (\Rightarrow) Perhatikan Gambar 2.



Gambar 2: Lingkaran Singgung Luar $\square ABCD$ Beserta Jari-Jari dan Bisektor Sudut

Misalkan $\square ABCD$ memiliki lingkaran singgung luar. Akan ditunjukkan bahwa $a + b = c + d$. Misalkan titik J dan K berturut-turut merupakan perpotongan dari perpanjangan a dan c serta d dan b . Karena $\square ABCD$ memiliki lingkaran singgung bentuk kedua, maka lingkaran tersebut akan menyinggung perpanjangan keempat sisi $\square ABCD$. Misalkan F merupakan titik singgung dari perpanjangan a , titik I dari perpanjangan b , titik G dari perpanjangan c dan titik H dari perpanjangan d . Karena AH dan AF merupakan garis singgung dari titik A maka

$$AH = AF.$$

Karena DH dan DG juga merupakan garis singgung dari titik D , KH dan KI garis singgung dari titik K , CI dan CG garis singgung dari titik C , BI dan BF garis singgung dari titik B serta JG dan JF garis singgung dari titik J maka diperoleh

$$DH = DG.$$

$$KH = KI.$$

$$CI = CG.$$

$$BI = BF.$$

$$JG = JF.$$

Karena $AH = AF$ maka

$$AB + BF = AD + DH,$$

$$a + BI = d + DG,$$

$$a + BC + CI = d + CD + CG,$$

$$a + b + CI = d + c + CG,$$

Selanjutnya karena $CI = CG$, maka diperoleh

$$a + b = c + d.$$

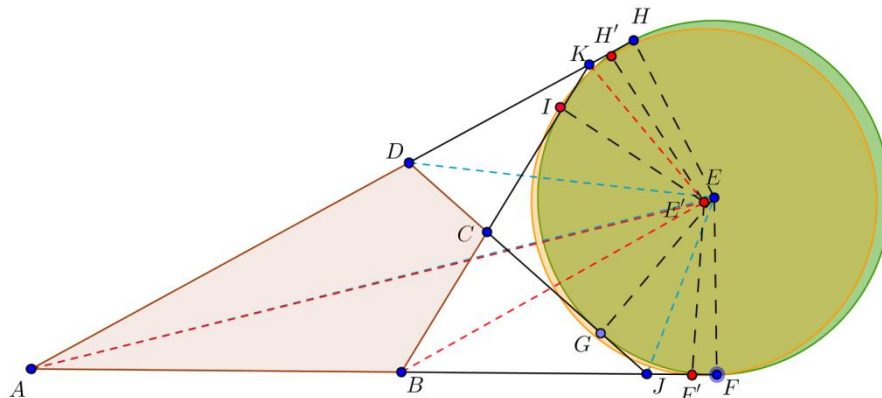
(\Leftarrow) Misalkan $\square ABCD$ memenuhi persamaan $a + b = c + d$. Akan ditunjukkan bahwa segiempat tersebut memiliki lingkaran singgung luar. Misalkan titik J merupakan titik potong dari perpanjangan a dengan c dan titik K merupakan titik potong dari perpanjangan d dengan b . Karena $a + b = c + d$ maka berdasarkan Teorema Urquhart [6] diperoleh

$$AJ + JC = AK + KC.$$

Perhatikan Gambar 3.

$$\begin{aligned} K \Delta ADJ &= AJ + JD + DA. \\ &= (AJ + JC) + (CD + DA). \\ &= (AK + KC) + (AB + BC). \\ &= K \Delta ABK. \end{aligned}$$

Karena $K \Delta ADJ = K \Delta ABK$, dan dengan memisalkan s merupakan setengah dari keliling suatu segitiga maka $s \Delta ADJ = s \Delta ABK$.



Gambar 3: Segiempat $ABCD$ yang Mempunyai Dua Buah Lingkaran Singgung

Perhatikan ΔADJ . Buat lingkaran singgung luar dari ΔADJ beri nama titik E sebagai titik pusatnya. Misalkan lingkaran singgung tersebut menyinggung perpanjangan AD di titik H , sisi DJ di titik G dan perpanjangan AB di titik F . Sehingga panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di E yang dilambangkan dengan r_E adalah

$$EG = EH = EF = r_E \quad (1)$$

Karena setengah keliling suatu segitiga yang memiliki lingkaran singgung luar sama dengan panjang garis singgungnya [5], maka

$$s \Delta ADJ = AF$$

atau

$$s \Delta ADJ = AH$$

Perhatikan ΔABK . Buat lingkaran singgung luar dari ΔABK beri nama E' sebagai titik pusatnya. Misalkan lingkaran singgung tersebut menyinggung perpanjangan AB di titik F' , sisi BK di titik I dan perpanjangan AK di titik H' . Sehingga panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di E' yang dilambangkan dengan $r_{E'}$ adalah

$$E'I = E'H' = E'F' = r_{E'} \quad (2)$$

Karena setengah keliling suatu segitiga yang memiliki lingkaran singgung luar sama dengan panjang garis singgungnya [5], maka

$$s \Delta ABK = AF',$$

atau

$$s \Delta ABK = AH'$$

Karena $s \Delta ADJ = s \Delta ABK$ maka haruslah

$$F = F', \quad (3)$$

dan

$$H = H', \quad (4)$$

Karena lingkaran yang berpusat di E dan E' memiliki dua buah titik singgung yang sama yaitu di titik F dan H maka haruslah

$$E' = E. \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan (1), (2), (3), (4) dan (5) maka

$$EF = EG = EK = EH.$$

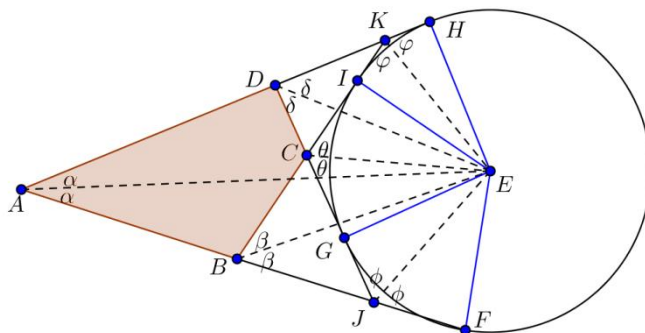
Karena E mempunyai jarak yang sama terhadap perpanjangan keempat sisi segiempat sehingga dapat dilukis suatu lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi a, b, c dan d . Jadi $\square ABCD$ memuat sebuah lingkaran singgung luar yang menyinggung perpanjangan keempat sisinya, ■

Mengkonstruksi Lingkaran Singgung Luar Segiempat

Setelah syarat dari suatu segiempat mempunyai lingkaran singgung luar diperoleh, barulah dapat dilakukan pengkonstruksian. Langkah-langkah dalam mengkonstruksi lingkaran singgung luar pada segiempat konveks adalah sebagai berikut:

- Buatlah $\square ABCD$ yang mempunyai panjang sisi $AB = a, BC = b, CD = c$ dan $AD = d$ dengan syarat semua sisinya tidak ada yang sejajar serta memenuhi Teorema 1.
- Perpanjang sisi a dan c sehingga berpotongan di titik J . Kemudian perpanjang juga sisi d dan b sehingga berpotongan di titik K .
- Buatlah masing-masing garis bisektor sudut pada sudut-sudut internal, yaitu $\angle A$ dan $\angle C$, sudut-sudut eksternal, yaitu sudut $\angle CBJ$ dan $\angle CDK$, serta 2 buah sudut yang terbentuk dari perpanjangan keempat sisi segiempat. Keenam bisektor sudut tersebut akan berpotongan di titik E .
- Dari titik E tersebut tarik garis yang tegak lurus ke perpanjangan sisi AD , beri nama titik H . Lalu lukis lingkaran yang berpusat di E dan berjari-jari EH . Sehingga lingkaran tersebut menyinggung perpanjangan sisi AB di titik F , perpanjangan BC di titik I , CD di titik G dan AD di titik H .

Untuk lebih memahami pengkonstruksian lingkaran singgung luar pada segiempat. Perhatikan Gambar 4.



Gambar 4: Titik pusat lingkaran yang terbentuk dari perpotongan enam garis bisektor sudut

Kongkurensi Bisektor Sudut

Pengkonstruksian lingkaran singgung luar bentuk kedua pada segiempat konveks menghasilkan kongkurensi dari enam buah bisektor sudut. Untuk membuktikan kongkurensi dari enam bisektor sudut, dapat dilakukan dengan cara berikut ini.

Perhatikan Gambar 4. Karena panjang sisi dari $\square ABCD$ memiliki hubungan $a + b = c + d$ maka berdasarkan Teorema 1 terdapat sebuah lingkaran singgung luar bentuk kedua yang menyinggung perpanjangan dari semua sisi. Misalkan lingkaran tersebut berpusat di E . Perhatikan $\triangle ABK$ karena lingkaran yang berpusat di E menyinggung sisi BK dititik I , perpanjangan AK dititik H serta perpanjangan AB dititik F , maka berdasarkan definisi [5] lingkaran tersebut merupakan lingkaran singgung luar dari $\triangle ABK$. Dengan membuat garis bisektor sudut dari masing-masing $\angle A, \angle KBF$, dan $\angle BKH$ maka berdasarkan teorema *external bisector* pada lingkaran singgung luar segitiga [3] ketiga garis bisektor sudut tersebut kongkuren di titik E . Sehingga ketiga garis bisektor tersebut adalah AE, BE , dan EK kongkuren di titik E .

Perhatikan $\triangle ADJ$. Karena lingkaran yang berpusat di E menyinggung perpanjangan sisi AD dititik H , perpanjangan AJ dititik F dan DJ dititik G maka berdasarkan Definisi 2.1 lingkaran tersebut merupakan lingkaran singgung luar dari $\triangle ADJ$. Dengan membuat garis bisektor sudut dari masing-masing