Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 2, Juli 2015
ISSN 2460 - 4542

Analisis Kestabilan Model Veisv Penyebaran Virus Komputer Dengan Pertumbuhan Logistik

Mohammad soleh[1], Seri Rodia Pakpahan[2]
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
Email: *msoleh1975@yahoo.co.id*

ABSTRAK

Pada makalah ini dibahas tentang penyebaran virus komputer menggunakan model VEISV dengan pertumbuhan logistik. Model VEISV mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas virus dan titik kesetimbangan endemik virus. Titik kesetimbangan ditentukan dengan menyelesaikan persamaan pada model VEISV dan diuji kestabilannya dengan kriteria nilai eigen dan Routh Hurwitz. Hasil yang diperoleh yaitu jika $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas virus stabil asimtotik, jika $(1-2cV^*)E^* > (1-cV^*)V^*$ dan $\left(cV^{*2}+E^*\right) > (V^*+2cV^*E^*)$ titik kesetimbangan endemik virus stabil asimtotik.
.

Katakunci : Model VEISV, Pertumbuhan Logistik, Routh-Hurwitz, Stabil Asimtotik, Titik *Equilibrium*.

ABSTRACT

This report discusses about computer viruses propagation by using VEISV model with logistic growth. Model of VEISV have two equilibrium states that is stability of virus-free state and stability of virus-endemic state. Equilibrium state is determined by solving the equations in the model VEISV and tested stability criteria eigenvalues and Routh-Hurwitz. Our result obtained that if $R_0 < 1$ *then a free equilibrium state is asymptotically stable, if* $(1-2cV^*)E^* > (1-cV^*)V^*$ *and* $\left(cV^{*2}+E^*\right) > (V^*+2cV^*E^*)$ *then a endemic equilibrium state asymptotically stable.*

Keywords : *Asymptotically Stable, Equilibrium State, Logistic Growth, Routh-Hurwitz, VEISV Model.*

Pendahuluan

Virus komputer muncul pada Tahun 1980-an dalam bentuk program yang mampu merusak operasi pada mesin. Seiring perkembangan zaman, kemajuan teknologi komputer dan telekomunikasi, serta dikembangkannya teknologi *sofware, hardware,* dan jaringan komputer yang semakin canggih menjadikan komputer alat penting bagi seluruh umat manusia sebagai keperluan dalam kehidupan sehari-hari. Di sisi lain, dengan berkembangnya teknologi komputer yang semakin canggih, maka perkembangan virus komputer pun menjadi semakin canggih dalam perusakan dan penyebarannya [8].

Virus komputer merupakan program komputer yang dapat menggandakan atau menyalin dirinya sendiri dan menyebar dengan cara menyisipkan salinan dirinya ke dalam program atau dokumen lain. Virus komputer dapat dianalogikan dengan virus biologis yang menyebar dengan cara menyisipkan dirinya sendiri ke sel makhluk hidup. Virus komputer sifatnya dapat merusak misalnya dengan merusak data pada dokumen, membuat pengguna komputer merasa terganggu dengan keberadaannya dalam sebuah sistem komputer, maupun tidak menimbulkan efek merusak sama sekali [7].

Virus komputer dianggap sebagai salah satu senjata yang paling berbahaya dan penyebarannya memiliki pengaruh besar pada dunia komputer. Berbagai upaya dilakukan untuk mengatasi masalah penyebaran virus pada komputer. Salah satunya dengan menginstal aplikasi antivirus. Tetapi penggunaan antivirus juga memiliki kelemahan, karena antivirus membutuhkan pembaharuan file secara periodik agar dapat bekerja optimal. Pada kenyataannya, pengaruh dari manusia memainkan peran penting dalam memperlambat penyebaran virus komputer.

Kesamaan antara penyebaran virus biologis dan propagasi cacing berbahaya mendorong para peneliti untuk mengadopsi model epidemi ke lingkungan jaringan. Salah satu jurnal tentang virus komputer telah menerapkan model epidemi VEISV [12].

VEISV adalah model penyebaran virus yang membagi empat kelompok *host*, yang mana *host* merupakan banyaknya komputer yang terhubung atau terkoneksi ke internet. Adapun ke empat *host* yang di maksud adalah kelas *vulnerable* (*V)* merupakan kelas yang berisikan *host* yang rentan terhadap virus, *exposed* (*E*) yaitu anggota *host* yang sudah terjangkit virus tapi belum dapat menularkan virus, *infectible* (*I*) yaitu yang berisikan *host* yang telah terinfeksi oleh virus dan mampu menularkan virus, *secured* (*S*) yaitu kelas yang berisikan *host* yang telah terlindungi oleh virus. Pada model tersebut asumsi yang diberikan adalah model laju perkembangan virus *nonmonotonic* dan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan yang menentukan ada atau tidaknya penyebaran virus pada suatu *host* [11].

Adapun penelitian tentang model penyebaran virus yang berhubungan dengan model VEISV antara lain adalah pada jurnal [6], melakukan penelitian untuk memperoleh periode tetap kekebalan sementara setelah menjalankan *software* anti-bahaya pada komputer dan pemodelan objek berbahaya dalam jaringan komputer dengan menggunakan model SEIQRS. Selanjutnya,[13], menganalisis kestabilan model epidemi SEIQV berdasarkan dua penanggulangan pemulihan utama yaitu karantina dan vaksinasi. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh [11], mengembangkan tingkat kontak model SEIR dengan menggunakan tingkat kejadian nonlinier. Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut menunjukkan bahwa titik *equilibrium* bebas virus stabil asimtotik global.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan [12], penulis tertarik untuk membahas tentang penyebaran virus komputer dengan menggunakan model VEISV pada model logistik dan semua *host* komputer memperoleh satu atau lebih penanggulangan keamanan, memberikan *host* dengan kekebalan sementara atau permanen terhadap *worm* (cacing) berbahaya.

Metode Penelitian

Adapun metodologi atau langkah-langkah dalam pembuatan makalah ini adalah sebagai berikut:

a. Membuat asumsi-asumsi yang sesuai untuk model VEISV.
b. Mendefenisikan paremeter-parameter yang digunakan. Adapun parameter-parameter ataupun koefisien-koefisien yang digunakan dalam model VEISV dengan pertumbuhan logistik dan kerusakan alami.
c. Menentukan titik kesetimbangan.
d. Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah ditentukan.
e. Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik ekuilibrium.

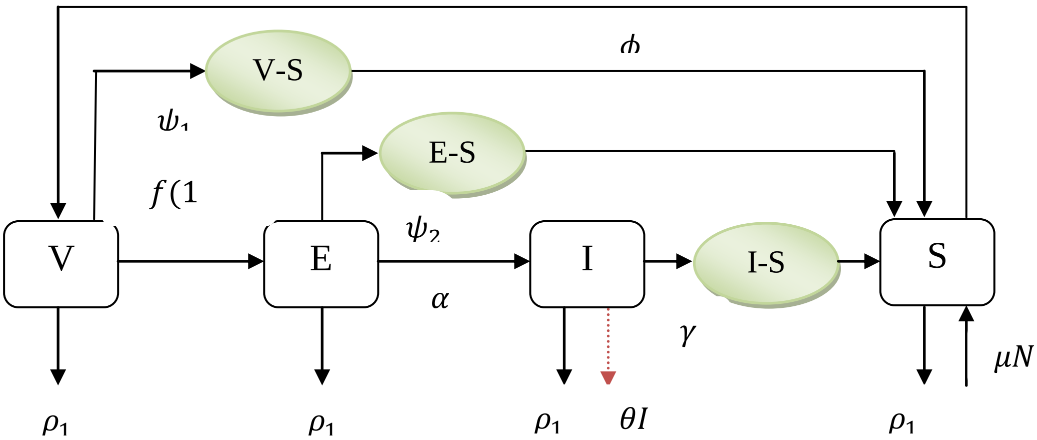
Hasil dan Pembahasan

Pembentukan Model

Model VEISV dengan pertumbuhan Logistik adalah suatu model VEISV yang dimodifikasi dengan menambahkan asumsi pertumbuhan logistik dan adanya proses kerusakan alami. Secara umum asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan model ini diantaranya sebagai berikut :

a. Adanya perturmbuhan logistik
b. Laju kontak, dinyatakan $\beta > 0$.
c. Semua *host* masuk ke dalam kelas *vulnerable (V)*.
d. Laju peralihan atau transisi dari kelas *exposed* menjadi *infected*, dinyatakan dengan $\alpha > 0$.
e. Laju peralihan atau transisi dari kelas *vulnerable* menjadi *secured*, dinyatakan dengan $\psi_1 > 0$.
f. Laju peralihan atau transisi dari kelas *exposed* menjadi *secured*, dinyatakan dengan $\psi_2 > 0$.
g. Laju peralihan atau transisi dari kelas *infected* menjadi *secured*, dinyatakan dengan $\gamma > 0$.
h. Laju peralihan atau transisi dari kelas *secured* menjadi *vulnerable*, dinyatakan dengan $\phi > o$.
i. Jumlah total *host*, dinyatakan N.
j. Tingkat gangguan pada komputer, dinyatakan $\theta > 0$.
k. Tingkat penggantian yang terlindungi pada komputer, dinyatakan $\mu > 0$.
l. Kerusakan alami, dinyatakan $\rho_1 > 0$

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka dapat dibentuk diagram alir model VEISV baru yaitu model VEISV dengan pertumbuhan logistisk sebagai berikut:



Secara matematis, berdasarkan diagaram alir di atas diperoleh suatu sistem Persamaan differensial dari model VEISV dengan mereduksi Persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \phi N - f(1-cV)VE - (\psi_1+\phi)V - \phi E - \phi I - \rho_1 V \\ \frac{dE}{dt} &= f(1-cV)VE - (\alpha+\psi_2)E - \rho_1 E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma+\theta)I - \rho_1 I \end{aligned} \tag{1}$$

Titik *Equilibrium*

a. Titik *Equilibrium* Bebas Virus

Titi *equilibrium* bebas virus merupakan suatu titik di mana tidak ada satu pun anggota *host* (*host*) yang terserang virus. Titik *equilibrium* bebas virus dinotasikan $(\hat{V},\hat{E},\hat{I})$, sehingga $\hat{I} = 0$. Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh titik *equilibrium* bebas virus $\left(\hat{V},\hat{E},\hat{I}\right) = \left(\frac{\phi N}{\psi_1+\phi+\rho_1}, 0{,}0\right)$.

$$R_0 = \frac{\phi N f(1-cV^*)}{(\psi_1+\phi+\rho_1)(\alpha+\psi_2+\rho_1)}. \tag{2}$$

R_0 disebut bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan yang menentukan ada atau tidaknya peyebaran virus pada suatu *host.*

b. Titik *equilibrium* endemik virus

Titik *equilibrium* endemik virus merupakan suatu titik di mana virus selalu ada di dalam *host* (*host*) dengan kata lain selalu ada anggota *host* (*host*) yang terserang virus komputer. Titik *equilibrium* endemik virus ini dinotasikan dengan (V^*,E^*,I^*), sehingga $I \neq 0$. Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh titik *equilibrium* endemik virus $V^*,E^*,I^*) = \left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N, \frac{\phi N - (\psi_1+\phi)\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right) - \rho_1\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N}{\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{(1-cV^*)}\right)\left(1-c\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right)\right)+\phi+\phi\frac{\alpha}{(\gamma+\theta+\rho_1)}}, \frac{\alpha E^*}{(\gamma+\theta+\rho_1)}\right)$.

Kestabilan Titik *Equilibrium* Bebas Virus

Teorema 1: Titik kesetimbangan bebas virus $\left(\hat{V},\hat{E},\hat{I}\right) = \left(\frac{\phi N}{\psi_1+\phi+\rho_1}, 0{,}0\right)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Bukti: Kestabilan titik *equilibrium* bebas virus dapat diselidiki dengan cara subtitusikan titik *equlibrium* bebas virus model VEISV adalah $\left(\hat{V},\hat{E},\hat{I}\right) = \left(\frac{\phi N}{\psi_1+\phi+\rho_1}, 0{,}0\right)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh:

$$Jf\left(\hat{V},\hat{E},\hat{I}\right) = \begin{bmatrix} -(\psi_1+\phi)-\rho_1 & -f\left(1-c\hat{V}\right)\hat{V}-\phi & -\phi \\ 0 & f\left(1-c\hat{V}\right)\hat{V}-(\alpha+\psi_2)-\rho_1 & 0 \\ 0 & \alpha & -\gamma-\theta-\rho_1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan Persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$(\lambda + (\psi_1+\phi)+\rho_1)\left(\lambda - f\left(1-c\hat{V}\right)\hat{V} + (\alpha+\psi_2)+\rho_1\right)(\lambda+\gamma+\theta+\rho_1) = 0$$

Maka diperoleh:

$$\lambda_1 = -\big((\psi_1 + \phi) + \rho_1\big)$$
$$\lambda_2 = f\big(1 - c\hat{V}\big)\hat{V} - (\alpha + \psi_2 + \rho_1)$$
$$\lambda_3 = -(\gamma + \theta + \rho_1)$$

Karena masing-masing parameter bernilai positif, maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dan supaya titik equilibrium bebas virus stabil asimtotik lokal maka, $\lambda_2 < 0$ yaitu:

$$f\big(1 - c\hat{V}\big)\hat{V} - (\alpha + \psi_2) - \rho_1 < 0$$
$$\big(1 - c\hat{V}\big)\left(\frac{\phi N}{\psi_1 + \phi + \rho_1}\right) < \frac{(\alpha + \psi_2 + \rho_1)}{\frac{\beta\alpha}{N}} \tag{3}$$

dari persamaan (3) dapat di simpulkan bahwa:

$$R_0 = \frac{\phi N f(1 - cV^*)}{(\psi_1 + \phi + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1)}$$
$$\frac{\phi N f(1 - cV^*)}{(\psi_1 + \phi + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1)} < 1 \tag{4}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka terbukti bahwa titik *equilibrium* bebas virus stabil asimtotik lokal, dimana pada saat $R_0 < 1$.

b. Kestabilan Titik *Equilibrium* Endemik Virus

Teorema 2 : Jika $(1 - 2cV^*)E^* > (1 - cV^*)V^*$ dan $\big(cV^{*2} + E^*\big) > (V^* + 2cV^*E^*)$ maka titik *equilibrium* endemik virus stabil asimtotik lokal.

Kestabilan titik *equilibrium* endemik virus dapat dilihat dengan cara subtitusikan titik *equilibrium* endemik virus

$$(V^*,E^*,I^*) = \left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N, \frac{\phi N-(\psi_1+\phi)\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right)-\rho_1\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N}{\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{(1-cV^*)}\right)\left(1-c\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right)\right)+\phi+\phi\frac{\alpha}{(\gamma+\theta+\rho_1)}}, \frac{\alpha E^*}{(\gamma+\theta+\rho_1)}\right)$$ ke dalam matrik Jacobian,

sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 + \lambda^2\big(&(\gamma + \theta + \rho_1) - f(1 - cV^*)V^* + (\alpha + \psi_2 + \rho_1) + f(1 - 2cV^*)E^* + (\psi_1 + \phi + \rho_1)\big)\\
&+ \lambda\{-f(1 - cV^*)V^*(\gamma + \theta + \rho_1) + (\gamma + \theta + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1)\\
&+ f(1 - 2cV^*)E^*(\gamma + \theta + \rho_1) + f(1 - 2cV^*)E^*(\alpha + \psi_2 + \rho_1)\\
&+ (\psi_1 + \phi + \rho_1)(\gamma + \theta + \rho_1) - f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho_1)\\
&+ (\psi_1 + \phi + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1) + \phi f(1 - 2cV^*)E^*\}\\
&+ \{f(1 - 2cV^*)E^*(\alpha + \psi_2 + \rho_1)(\gamma + \theta + \rho_1)\\
&- f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho_1)(\gamma + \theta + \rho_1) + (\psi_1 + \phi + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1)(\gamma + \theta + \rho_1)\\
&+ \phi f(1 - 2cV^*)E^*(\gamma + \theta + \rho_1) + \alpha\phi f(1 - 2cV^*)E^*\}
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema (kriteria Routh Hurwitz), titik *equilibrium* endemik virus (V^*, E^*, I^*) stabil asimtotik lokal jika $a_3 > 0,\ a_1 > 0,\ a_1a_2 > a_3$.

$a_1a_2 > a_3$ jika dan hanya jika $a_1a_2 - a_3 > 0$. Sekarang, akan ditentukan nilai dari $a_1,\ a_3$ dan $a_1a_2 - a_3$.

(a) Akan dibuktikan $a_1 > 0$

$$a_1 = (\gamma + \theta + \rho_1) + (\psi_1 + \phi + \rho_1) + (\alpha + \psi_2 + \rho_1) + fcV^{*2} + fE^* - fV^* - 2fE^*cV^*$$

Apabila $\big(cV^{*2} + E^*\big) > (V^* + 2cV^*E^*)$, maka berdasarkan Teorema 2, sehingga $\big(cV^{*2} + E^*\big) - (V^* + 2cV^*E^*) > 0$, maka terbukti bahwa $a_1 > 0$.

(b) Akan dibuktikan $a_3 > 0$

$$\begin{aligned}
a_3 = (\gamma + \theta + \rho_1)\{&f(1 - 2cV^*)E^*(\alpha + \psi_2 + \rho_1) - f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho_1)\\
&+ (\psi_1 + \phi + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1) + \phi f(1 - 2cV^*)E^*\} + \alpha\phi f(1 - 2cV^*)E^*
\end{aligned}$$

Apabila $(1 - 2cV^*)E^* > (1 - cV^*)V^*$, maka $f(1 - 2cV^*)E^*(\alpha + \psi_2 + \rho_1) > f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho 1$, sehingga berdasarkan Teorema 2 terbukti bahwa *f1−2cV∗E∗α+ψ2+ρ1−f1−cV∗V∗ψ1+ϕ+ρ1>0,* mak $a_3 > 0$.

(c) Akan ditunjukkan $a_1a_2 > a_3$ jika dan hanya jika $a_1a_2 - a_3 > 0$

$$\begin{aligned}
a_1a_2 - a_3 = {} & (\gamma + \theta + \rho_1)(\alpha + \psi_2 + \rho_1)\{2f(1 - 2cV^*)E^* - 2f(1 - cV^*)V^* + 2(\psi_1 + \phi + \rho_1) \\
& + (\gamma + \theta + \rho_1) + (\alpha + \psi_2 + \rho_1)\} \\
& + (\gamma + \theta + \rho_1)(\psi_1 + \phi + \rho_1)\{2f(1 - 2cV^*)E^* - 2f(1 - cV^*)V^* \\
& + (\psi_1 + \phi + \rho_1)\} \\
& + (\gamma + \theta + \rho_1)\{(f(1 - cV^*)V^*)^2 - 2f(1 - 2cV^*)E^*f(1 - cV^*)V^* \\
& + (f(1 - 2cV^*)E^*)^2 - f(1 - cV^*)V^*(\gamma + \theta + \rho_1) + f(1 - 2cV^*)E^*\} \\
& + (\alpha + \psi_2 + \rho_1)\{f(1 - 2cV^*)E^*(\alpha + \psi_2 + \rho_1) + (\alpha + \psi_2 + \rho_1)(\psi_1 + \phi + \rho_1) \\
& + \phi f(1 - 2cV^*)E^* + f(1 - 2cV^*)E^*(\psi_1 + \phi + \rho_1) + (\psi_1 + \phi + \rho_1)^2 \\
& - f(1 - 2cV^*)E^*f(1 - cV^*)V^* - f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho_1) \\
& + (f(1 - 2cV^*)E^*)^2\} \\
& + (\psi_1 + \phi + \rho_1)\{\phi f(1 - 2cV^*)E^* - f(1 - cV^*)V^*(\psi_1 + \phi + \rho_1) \\
& + (f(1 - cV^*)V^*)^2 - f(1 - 2cV^*)E^*f(1 - cV^*)V^*\} \\
& + \phi f(1 - 2cV^*)E^*\{f(1 - 2cV^*)E^* - f(1 - cV^*)V^* - \alpha\}
\end{aligned}$$

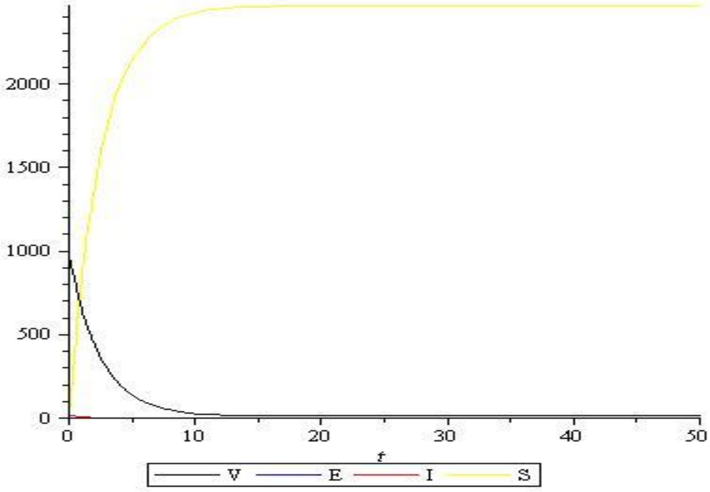
Apabila $(1 - 2cV^*)E^* > (1 - cV^*)V^*$, maka $2f(1 - 2cV^*)E^* > 2f(1 - cV^*)V^*$. Sehingga berdasarkan Teorema 2, terbukti bahwa $2f(1 - 2cV^*)E^* - 2f(1 - cV^*)V^* > 0$, maka terbukti $a_1a_2 > a_3$ jika dan hanya jika $a_1a_2 - a_3 > 0$.

Oleh karena $a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1a_2 > a_3$, maka berdasarkan Teorema (kriteria Routh-Hurwitz), titik *equilibrium* endemik virus adalah stabil asimtotik lokal. Hal ini berarti dalam waktu yang lama, virus selalu ada dalam komputer.

1. Simulasi

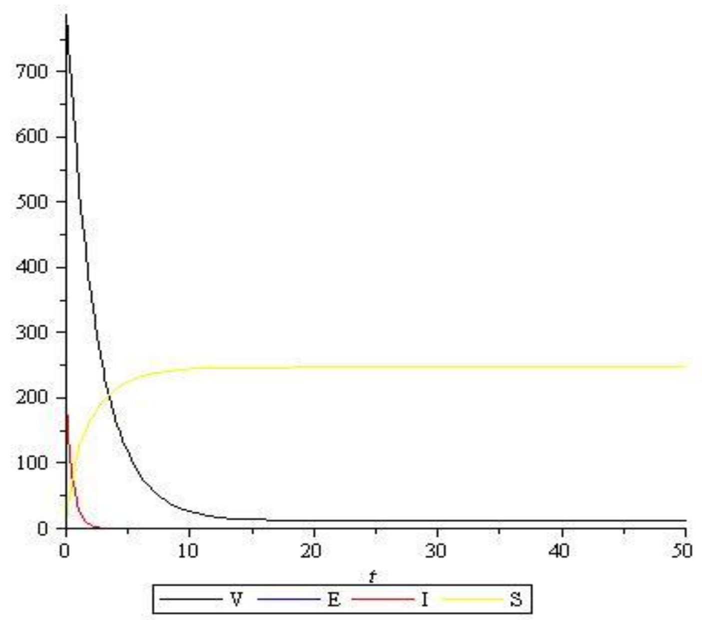
a. Titik equilibrium bebas virus

Parameter yang digunakan adalah $\beta = 100$, $\alpha = 0.286, \psi_1 = 0.003$, $\psi_2 = 6.08$, $\gamma = 0.5$, $\phi = 0.005, N = 1000, \theta 0.1, \mu = 1, \rho_1 = 0.4, c = 0.25$. Dimisalkan nilai awal: $V(0) = 880$, $E(0) = 100$, $I(0) = 20$, dan $S(0) = 0$, sehingga dinamika populasi bebas virus dapat di lihat pada Gambar berikut ini :



b. Titik eqilibrium endemik virus

Parameter yang digunakan adalah $\beta = 50$, $\alpha = 0.286, \psi_1 = 0.003$, $\psi_2 = 6.08$, $\gamma = 0.5$, $\phi = 0.005, N = 1000, \theta = 1, \mu = 0.1, \rho_1 = 0.4, c = 0.25$. Dimisalkan nilai awal: $V(0) = 500$, $E(0) = 300$, $I(0) = 200$, dan $S(0) = 0$, sehingga dinamika populasi endemik virus dapat di lihat pada Gambar berikut ini :



Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model VEISV penyebaran virus dengan melakukan reduksi adalah:
$$\frac{dV}{dt} = \phi N - fEV - (\psi_1 + \phi)V - \phi E - \phi I$$
$$\frac{dE}{dt} = fEV - (\alpha + \psi_2)E$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma + \theta)I$$
dengan jumlah tuan rumah keseluruhan $V + E + I + S = N$, dimana kelas komputer rentan tidak memiliki kekebalan *vulnerable* (V), kelas komputer yang terjangkit virus *exposed (E)*, kelas komputer yang terinfeksi virus komputer *infective (I)*, dan kelas komputer yang terlindungi dari virus komputer *secured (S)*. Pada model VEISV, komputer hanya mengalami perlindungan sementara, dengan kata lain setelah komputer memasuki kelas *secured (S)* akan dinyatakan masuk kembali ke kelas rentan atau kelas *vulnerable (V)*.
2. Ada dua titik *equilibrium* pada model VEISV yaitu:
   a. Titik *equilibrium* bebas virus $\left(\hat{V}, \hat{E}, \hat{I}\right) = \left(\frac{\phi N}{\psi_1 + \phi + \rho_1}, 0{,}0\right)$
   b. Titik *equilibrium* endemik virus
$$(V^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N, \frac{\phi N - (\psi_1+\phi)\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right) - \rho_1\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N}{\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{(1-cV^*)}\right)\left(1-c\left(\frac{(\alpha+\psi_2)+\rho_1}{\beta\alpha(1-cV^*)}N\right)\right)+\phi+\phi\frac{\alpha}{(\gamma+\theta+\rho_1)}}, \frac{\alpha E^*}{(\gamma+\theta+\rho_1)}\right)$$
3. Ada dua kestabilan titik *equilibrium* pada model VEISV yaitu kestabilan titik *equilibrium* bebas penyakit dan kestabilan titik *equilibrium* endemik penyakit. Titik *equilibrium* bebas penyakit stabil asimtotik lokal karena nilai parameter bernilai real positif maka, $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dan $R_0 < 1$, dan titik *equilibrium* endemik penyakit stabil asimtotik lokal, berarti dalam waktu yang lama penyakit akan akan terus ada dalam populasi.