Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 2, Juli 2015
ISSN 2460 - 4542

Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Dari Matriks Kompleks Bujursangkar Ajaib

Fitri Aryani[1], Rosi Azwanti Dwi Maisyitah[2]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Pembahasan pada makalah ini mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada matriks kompleks bujur sangkar ajaib. Sebelum menentukan nilaieigen suatu matriks kompleks bujur sangkar ajaib, langkah pertama adalah membentuk matriks bujur sangkar ajaib dengan aturan jumlah elemen setiap baris, kolom dan kedua diagonalnya sama yang disimbolkan dengan d. Untuk mendapat nilai eigen dari suatu matriks harus dihitung nilai $\det(A - \lambda I)$. Dalam menghitung nilai determinan tersebut, penulis menggunakan metode Salihu. Ada beberapa istilah yang berkaitan dengan metode Salihu yaitu determinan interior dan determinan unik. Vektor eigen yang diperoleh dari contoh soal mempunyai kesamaan, yaitu terdapat satu vector eigen dari vektor-vekto reigen yang diperoleh berbentuk $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks 3×3 dan $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks 4×4.

Katakunci : determinan, metode Salihu, determinan interior, determinan unik, nilai eigen, vektor eigen,

ABSTRACT

This paper, discuss about the eigenvelues and eigenvectors of the matrix complex magic square. Before determining the eigenvalues of a complex matrix of magic square, the first step is to from a complex matrix of magic squares with the rules of the number of elements for each row, column, and both diagonals are symbolized by d. *In getting the eigenvalues of a matrix, the determinant value must be calculated. In calculating the value of the determinant, the writer used Salihu method. The eigenvector which is obtained from the example have a similarity, that is one eigenvector of the eigenvectors is* $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *for matrix* 3×3 *and* $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *for matrix* 4×4.

Keywords *: eigen values, eigen vector, determinant, Salihu's method, interior determinant, unique determinant.*

Pendahuluan

Matriks merupakan susunan segi empat dari bilangan-bilangan riil atau kompleks yang disusun atau dijajarkan menurut baris dan kolom. Jenis-jenis matriks dapat dibedakan berdasarkan susunan elemen matriks dan berdasarkan sifat dari operasi matriksnya, diantaranya matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$, matriks identitas, matriks diagonal, matriks singular dan non singular. Matriks bujur sangkar yang mempunyai penjumlahan setiap baris, kolom dan diagonalnya sama disebut dengan matriks bujur sangkar ajaib. Jumlah elemen baris, kolom dan kedua diagonalnya yang disimbolkan dengan d.Disebabkan hal tersebut matriks bujur sangkar ajaib cukup unik dalam penyususnannya, Apakah nilai eigen dan vector eigen dari matriks tersebut juga mempunyai hal yang unik? . Hal ini yang membuat penulis ingin menelaahnya lebih dalam.

Setiap matriks bujur sangkar A selalu mempunyai suatu besaran skalar yang disebut determinan. Sebaliknya, setiap matriks yang tidak bujur sangkar tidak mempunyai determinan. Menurut T. Sutojo, dkk (2010), determinan adalah nilai yang dihitung berdasarkan nilai elemen-elemennya dan menurut rumus tertentu yang ditulis dengan simbol det(A) atau $|A|$. Jika nilai determinan matriks A nol, berarti matriks bujur sangkar tersebut singular dan tidak memiliki invers. Jika nilai determinan suatu matriks tidak nol, berarti matriks A tersebut non singular dan mempunyai invers.

Banyak metode untuk menghitung determinan matriks. Metode-metode tersebut adalah metode Sarrus, metode Minor-Kofaktor, metode Chio, metode Eliminasi Gauss, metode Dekomposisi matriks dan metode Dogson. Determinan juga berperan dalam mencari nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran $n\ x\ n$, sementara vektor eigen adalah vektor kolom bukan nol yang bila dikalikan dengan suatu matriks berukuran $n\ x\ n$ akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor eigen itu sendiri. Definisi tersebut berlaku untuk matriks dengan elemen bilangan real dan akan mengalami pergeseran ketika elemen berupa bilangan kompleks. Pada penulisan ini akan dibahas penentuan nilai eigen dan vector eigen dari matriks kompleks bujur sangkar ajaib (3 x 3) dan (4 x 4).

Metode Penelitian

Metode penelitian dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk matriks kompleks bujur sangkar ajaib 3×3 dan 4×4:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

dengan,

$$d = \frac{\sum n^2}{n}$$

danharusmemenuhi:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d \qquad untuk\ semua\ j$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d \qquad untuk\ semua\ i$
3. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = d$
4. $\sum_{i=1}^{n} a_{i(n-i+1)} = d$

2. Menghitung determinan$(A - \lambda I) = 0$ menggunakanmetodeSalihudengan rumus

$$|A - \lambda I|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}, |B| \neq 0$$

3. Menentukan nilai eigen dari matriks A dengan rumus

   $det\ (A - \lambda I) = 0$

4. Menentukan vector eigen matriks A dari nilai eigen yang didapat.

   $(A - \lambda I)x = 0$

Hasil dan Pembahasan

1 Matriks Kompleks Bujur Sangkar Ajaib 3×3

Berikut diberikan secara umum langkah-langkah dalam pembentukan matriks kompleks bujur sangkar ajaib $3\ x\ 3$ yaitu sebagai berikut:

1. Angka pertama untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{12}.
2. Angka kedua untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{33}.
3. Angka ketiga untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{21}.
4. Angka keempat untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{31}.
5. Angka kelima untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{22}.
6. Angka keenam untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{13}.
7. Angka ketujuh untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{23}.
8. Angka kedelapan untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{11}.
9. Angka yang terakhir untuk bagian riil dan imajiner diletakkan pada a_{32}.

Contoh 1 Matriks kompleks bujur sangkar ajaib 3×3

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 8+9i & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i \end{bmatrix},$$

$$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 10-9i & 3-2i & 8-7i \\ 5-4i & 7-6i & 9-8i \\ 6-5i & 11-10i & 4-3i \end{bmatrix}$$

$$C_{3\times3} = \begin{bmatrix} -8+9i & -1+2i & -6+7i \\ -3+4i & -5+6i & -7+8i \\ -4+5i & -9+10i & -2+3i \end{bmatrix} \text{ dan } D_{3\times3} = \begin{bmatrix} -10-9i & -3-2i & -8-7i \\ -5-4i & -7-6i & -9-8i \\ -6-5i & -11-10i & -4-3i \end{bmatrix}$$

2. Matriks Kompleks Bujur Sangkar Ajaib 4×4

Berikut diberikan secara umum langkah-langkah dalam pembentukan matriks kompleks bujur sangkar ajaib $4\ x\ 4$ yaitu sebagai berikut:

1. Pertama adalah mengisi seluruh matriks bujur sangkar untuk bagian riil dan imajiner tersebut dengan bilangan secara berurutan dengan konjuget yang sama. Misalnya, $(1+3i, 2+4i, 3+5i, \ldots, 16+18i)$ atau $(3-i, 4-2i, 5-3i, \ldots, 18-16i)$ atau $(-8+i, -9+2i, -10+3i, \ldots, -23+16i)$ atau $(-3-i, -4-2i, -5-3i, \ldots, -18-16i)$ dan seterusnya.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 2, Juli 2015
ISSN 2460 - 4542

2. Kemudian buat garis diagonal, sehingga garis diagonal pertama dan kedua akan berpotongan.
3. Semua elemen yang terkena garis diagonal akan saling tukar. Elemen yang jaraknya terjauh paling ujung ditukar dengan yang paling ujung dan elemen yang kedua setelah yang paling ujung ditukar juga dengan elemen yang tempatnya sama. Begitu seterusnya sampai semua elemen tertukar.
4. Lakukan seluruh langkah diatas, sampai seluruh matriks bujur sangkar terisi oleh angka.

Contoh 2 Matriks kompleks bujur sangkar ajaib 4×4

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 17+16i & 3+2i & 4+3i & 14+13i \\ 6+5i & 12+11i & 11+10i & 9+8i \\ 10+9i & 8+7i & 7+6i & 13+12i \\ 5+4i & 15+14i & 16+15i & 2+i \end{bmatrix},$$

$$B_{4\times4} = \begin{bmatrix} 16-17i & 2-3i & 3-4i & 13-14i \\ 5-6i & 11-12i & 10-11i & 8-9i \\ 9-10i & 7-8i & 6-7i & 12-13i \\ 4-5i & 14-15i & 15-16i & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$C_{4\times4} = \begin{bmatrix} -17+16i & -3+2i & -4+3i & -14+13i \\ -6+5i & -12+11i & -11+10i & -9+8i \\ -10+9i & -8+7i & -7+6i & -13+12i \\ -5+4i & -15+14i & -16+15i & -2+i \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$D_{4\times4} = \begin{bmatrix} -16-17i & -2-3i & -3-4i & -13-14i \\ -5-6i & -11-12i & -10-11i & -8-9i \\ -9-10i & -7-8i & -6-7i & -12-13i \\ 4-5i & -14-15i & -15-16i & -1-2i \end{bmatrix}$$

3. Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Kompleks Bujursangkar Ajaib

Nilai eigen suatu mariks A diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$. Sedangkan vektor eigen suatu mariks A diperoleh dari $(A - \lambda I)x = 0$ dengan cara mengganti nilai λ dengan nilai λ yang diperoleh dari persamaan karakteristik tersebut.

Contoh 3. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kompleks bujur sangkar ajaib

$$A = \begin{bmatrix} 8+9i & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:
Menggunakan persamaan karakteristik untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 8+9i & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk menghitung determinan matriks $(A - \lambda I)$ dengan metode Salihu, dibutuhkan determinan interior berikut :

$$(|B|) = \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 5+6i-\lambda$$

dan determinan uniknya :

$$(|C|) = \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(|D|) = \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+2i & 6+7i \\ 5+6i-\lambda & 7+8i \end{vmatrix}$$
$$(|E|) = \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3+4i & 5+6i-\lambda \\ 4+5i & 9+10i \end{vmatrix}$$
$$(|F|) = \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$

dengan determinan interior dan determinan unik yang telah didapat, maka dapat dibentuk rumus determinan metode Salihu, yaitu :

$$\frac{1}{5+6i-\lambda}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 8+9i-\lambda & 1+2i \\ 3+4i & 5+6i-\lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+2i & 6+7i \\ 5+6i-\lambda & 7+8i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3+4i & 5+6i-\lambda \\ 4+5i & 9+10i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5+6i-\lambda & 7+8i \\ 9+10i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{5+6i-\lambda}\begin{vmatrix} 37+83i-13\lambda+46i^2-15i\lambda+\lambda^2 & -23-49i-26i^2+6i\lambda+7\lambda^2 \\ 7+17i+10i^2+4\lambda+5i\lambda & -53-115i-7\lambda-62i^2-9i\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda-2\sqrt{6}(i+1)\right)\left(\lambda+2\sqrt{6}(i+1)\right)(\lambda-(15+18i)) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 2\sqrt{6}(i+1)$, $\lambda_2 = -2\sqrt{6}(i+1)$ dan $\lambda_3 = 15+18i$

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, λ_2, dan λ_3.

Untuk $\lambda_1 = 2\sqrt{6}(i+1)$, diperoleh : $(A-\lambda I)x = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 8+9i & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\sqrt{6}(i+1) & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6}(i+1) & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6}(i+1) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1.54\times 10^7)+(-4.24\times 10^6)i}{2.233448531\times 10^7} \\ \dfrac{(3.68\times 10^7)+(7.17\times 10^7)i}{1.10\times 10^8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = -2\sqrt{6}(i+1)$, maka

$$p_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(3864.37)+(-48810.71)i}{-3.99\times 10^7} \\ \dfrac{(-6.28\times 10^5)+(6.71\times 10^5)i}{1.40\times 10^6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_3 = 15 + 18i$, maka $p_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan hasil diatas, maka dapat ditulis vektor eigen dari matriks A pada contoh soal diatas adalah sebagai berikut :

$[p_1 \quad p_2 \quad p_3] =$

$$\begin{bmatrix} \frac{(-1.54 \times 10^7) + (-4.24 \times 10^6)i}{2.233448531 \times 10^7} & \frac{(3864.37) + (-48810.71)i}{-3.99 \times 10^7} & 1 \\ \frac{(3.68 \times 10^7) + (7.17 \times 10^7)i}{1.10 \times 10^8} & \frac{(-6.28 \times 10^5) + (6.71 \times 10^5)i}{1.40 \times 10^6} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 4. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kompleks bujur sangkar ajaib

$$A = \begin{bmatrix} 16-17i & 2-3i & 3-4i & 13-14i \\ 5-6i & 11-12i & 10-11i & 8-9i \\ 9-10i & 7-8i & 6-7i & 12-13i \\ 4-5i & 14-15i & 15-16i & 1-2i \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Dengan cara yang sama pada contoh 3 di atas maka diperoleh nilai eigen dan vektor eigen dari matriks di atas adalah sebagai berikut :

a. Nilai eigen diperoleh $\lambda_1 = 4\sqrt{5}(i+1)$, $\lambda_2 = -4\sqrt{5}(i+1)$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 38 + 34i$
b. Vektor eigen diperoleh

$[p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4]$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{2.96 \times 10^{21}}{2.99 \times 10^{20}} & \frac{(-7.49 \times 10^{17}) + (1.46 \times 10^{16})i}{6.45 \times 10^{17}} & \frac{(-6.96 \times 10^9) + (3.53 \times 10^9)}{2.66 \times 10^{10}} & 1 \\ \frac{(7.89 \times 10^{20}) + (4.74 \times 10^{20})i}{5.82 \times 10^{22}} & \frac{(-4.09 \times 10^{15}) + (-6.96 \times 10^{16})i}{4.39 \times 10^{17}} & \frac{(-2.56 \times 10^9) - 1.28 \times 10^9 i}{2.64 \times 10^{10}} & 1 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam menentukan nilai eigen dan vector eigen dari matriks kompleks bujur sangkar ajaib 3×3 dan 4×4 dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Pembentukan matriks kompleks bujur sangkar ajaib sama halnya dengan pembentukan matriks kompleks bujur sangkar ajaib dengan elemen bilangan riil.
2. Pembentukan matriks kompleks bujur sangkar ajaib akan berlaku jika elemen-elemen pada matriks semuanya berbentuk sama, artinya jika elemen pertama $a + bi$ maka semua elemennya $a + bi$ sama halnya untuk $a - bi$ atau $-a + bi$ atau $-a - bi$.
3. Nilai eigen dari matriks kompleks bujur sangkar ajaib juga berbentuk bilangan kompleks.

4. Vektor eigen yang diperoleh dari contoh soal pada pembahasan mempunyai kesamaan, yaitu terdapat satu vector eigen dari vektor-vektor eigen yang diperoleh berbentuk $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks 3×3 dan $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks 4×4.
5. Penggunaan metode Salihu cukup efektif dalam menentukan nilai determinan dari matriks, dan juga lebih mudah untuk dipahami sehingga lebih mudah dalam menghitung determinan matriks orde$n \times n\ (n \geq 3)$.

Daftar Pustaka

[1] Bahota, Andi.. *Menghitung Determinan Matriks* $n \times n(n \leq 3)$ *Dengan Menggunakan Metode Salihu.* JOM FMIPA. 2014 Volume 1, No. 02.
[2] Ikromah, Lutfiatul,. *Matriks Bujur Sangkar Ajaib Orde Genap Kelipatan Empat Menggunakan Metode Durer.* Jurnal Sains, Teknologi dan Industri. 2011 Volume 9, No. 1.
[3] Rorres, Anton.. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* Edisi Kedelapan Jilid 1. Erlangga 2004: Jakarta.
[4] Rorres, Anton.. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* Edisi Kedelapan Jilid 2. Erlangga 2005: Jakarta.
[5] Ruminta.. *Matriks Persamaan Linear dan Pemrograman Linear.* Rekayasa Sains 2009: Bandung.
[6] Sutojo, T. dkk. *Aljabar Linear & Matriks*. Andi 2009: Semarang.
[7] Wibisono, Gunawan.. *Peubah Kompleks* Terjemahan John D. Paliouras, hal 1-7, Erlangga 1987: Jakarta.