Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 2, Juli 2015
ISSN 2460 - 4542

Generalized Inverse Pada Matriks Atas Z_n

Corry Corazon Marzuki[1], Yulia Rosita[2]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
E-mail: corrazon_m@yahoo.co.id@uin-suska.ac.id,Yuliarosita21@yahoo.com@uin-suska.ac.id.

ABSTRAK

Suatu matriks mempunyai invers apabila matriks tersebut non-singular dan bujur sangkar. Namun, apabila matriks tersebut singular atau tidak bujur sangkar, inversnya masih dapat ditentukan dengan *generalized inverse*. Pada tugas akhir ini dibahas bagaimana menentukan *generalized inverse* pada matriks atas Z_n menggunakan aturan algoritma dan aturan pendiagonalan matriks. Berdasarkan pembahasan pada tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa apabila n merupakan bilangan prima maka Z_n adalah lapangan dan matriks atas Z_n pasti mempunyai *generalized inverse*. Namun apabila n bukan bilangan prima maka Z_n adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan matriks atas Z_n mempunyai *generalized inverse* apabila dalam proses pengerjaan tidak dibutuhkan invers dari suatu elemen atas Z_n yang tidak mempunyai invers terhadap perkalian. Adapun *generalized inverse* yang diperoleh adalah tidak tunggal.
.

Kata kunci*:* Bilangan Bulat Modulo n, Generalized Inverse, Lapangan, Rank, Ring

ABSTRACT

A matrix has an inverse if the matrix is non-singular and square. However, if the matrix is singular or not square, inverse still can be determined with the generalized inverse. In this thesis discussed how to determine the inverse matrix of $\boldsymbol{Z_n}$ *using the rules diagonalizing matrix and algorithms rules. The result of this research is that if* $\boldsymbol{n}$ *is a prime then* $\boldsymbol{Z_n}$ *is a field and the matrix over* $\boldsymbol{Z_n}$ *has a generalized inverse. However if* $\boldsymbol{n}$ *is not prime then* $\boldsymbol{Z_n}$ *is commutative ring with unity, and the matrix over* $\boldsymbol{Z_n}$ *has a generalized inverse if in the process is not needed inverse of an element over* $\boldsymbol{Z_n}$ *has no multiplicative inverse. The generalized inverse was not obtained in a single.*

KeyWords*: Field, Generalized Inverse, Integer Modulo n, Rank, Ring.*

Pendahuluan

Salah satu jenis himpunan matriks adalah himpunan dari matriks atas lapangan, $M_{m\times n}(F)$. Selain himpunan dari matriks atas lapangan, ada juga himpunan dari matriks yang entri-entrinya elemen ring komutatif, yang disebut dengan himpunan dari semua matriks atas ring komutatif, $M_{m\times n}(R)$.

Dalam perhitungan matriks terdapat beberapa operasi matriks, antara lain penjumlahan matriks, perkalian matriks, determinan dari matriks dan menentukan invers dari matriks. Suatu matriks mempunyai invers apabila matriks itu merupakan matriks bujur sangkar dan non singular. Dengan kata lain bahwa hanya matriks bujur sangkar dan non singular yang memiliki invers. Berdasarkan jurnal yang berjudul *"A Generalized Inverse for Matrices"* karangan R. Penrose Tahun 1954 bahwasanya bukan hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai invers, tetapi matriks yang tidak bujur sangkar atau singular juga mempunyai invers yang disebut *generalized inverse*.

Generalized inverse telah banyak yang dibahas dan diteliti diantaranya, Jeff Gill and King dalam jurnal yang berjudul "*What is the Generalized Inverse of a Matrix*?" yang telah membahas mengenai menentukan *generalized inverse* pada matriks. Selanjutnya, I.A Adetunde, dkk tahun 2010 dalam jurnal yang berjudul *"On The Generalized Inverse of a Matrix"* yang membahas tentang menentukan *generalized inverse* pada matriks singular dan matriks bujur sangkar serta penerapannya pada sistem persamaan linear. Selanjutnya penelitian yang sudah dilakukan oleh Desi Murnita (2012), yakni tentang "Penyelesaian Invers Matriks Menggunakan Metode *Generalized Inverse"*, yang membahas bagaimana menentukan *generalized inverse* dari matriks yang tidak bujur sangkar berukuran $m \times n$ dan matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ yang singular.

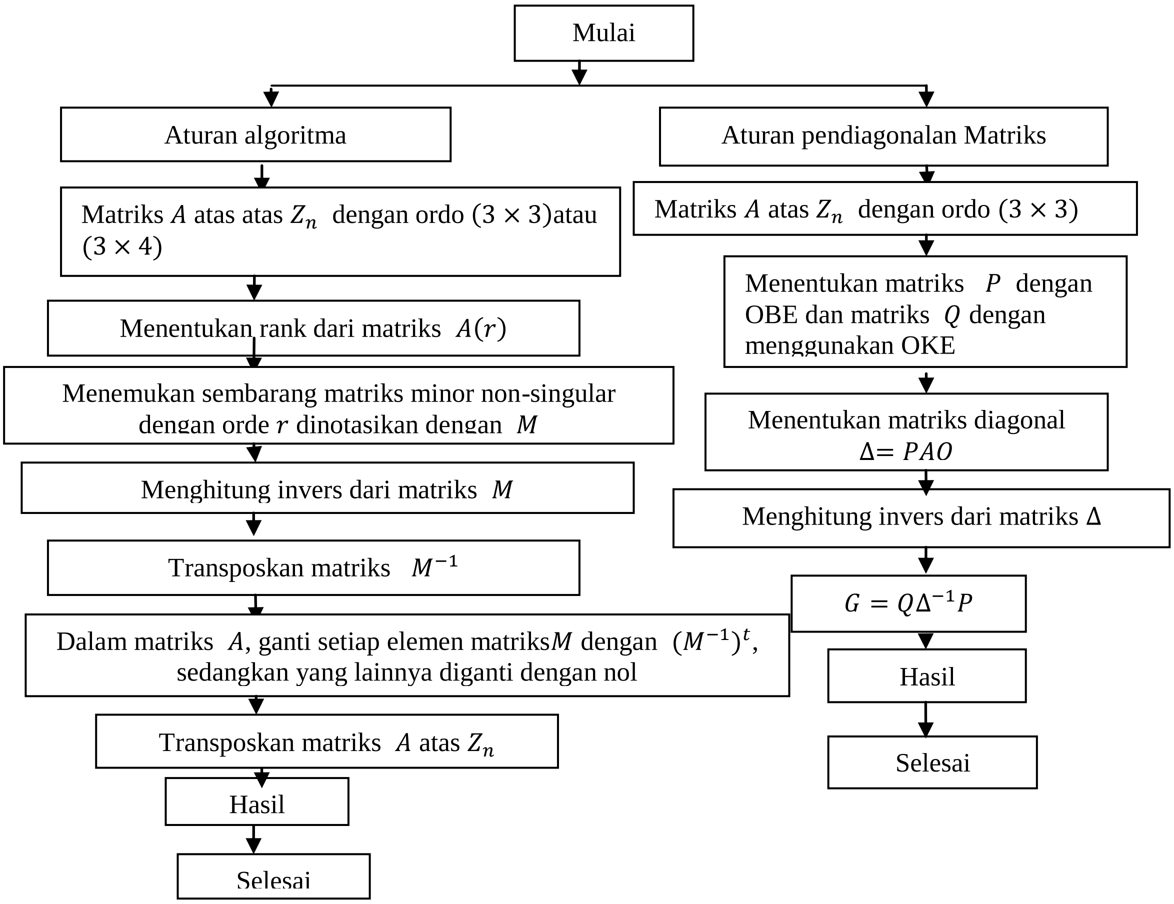
Pada penelitian ini mengemukakan tentang bagaimana menentukan *generalized inverse* dari matriks yang tidak bujur sangkar berukuran $m \times n$ dan matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ yang singular atas Z_n.

Dalam penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan langkah-langkah penyelesaian *generalized inverse* pada matriks atas Z_n dengan aturan pendiagonalan matriks dan algoritma.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti jurnal-jurnal, atau makalah-makalah dan buku-buku yang bersangkutan.

Jalannya penelitian dapat ditunjukkan pada Gambar 1 dibawah ini:



Gambar 1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

Hasil Dan Pembahasan

Generarlized Inverse

Selama ini yang diketahui matriks yang memiliki invers adalah matriks bujur sangkar dan non singular. Akan tetapi bila diberikan permasalahan untuk matriks yang tidak bujur sangkar atau singular, maka kita dapat menentukan invers dari matriks tersebut yang dinamakan *generalized inverse*.

Definisi 1. (J.Otero, 1998): Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka G adalah *generalized inverse* dari A dengan ukuran matriks $n \times m$ apabila berlaku $AGA = A$. Adapun matriks G ini tidak tunggal.
Ada dua cara yang digunakan untuk menemukan *generalized inverse* dari sebuah matriks yaitu :

1. Aturan algoritma.
2. Aturan pendiagonalan matriks.

Ring (Gelanggang)

Apabila himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring, maka ditulis (R,+,·) suatu ring, atau lebih singkat disebut R ring.

Definisi 2. (Jimmie Gilbert dan Linda Gilbert,1992): Diberikan himpunan tak kosong R disebut ring (gelanggang) atas operasi penjumlahan (+) dan perkalian (·), jika memenuhi sifat :

1. Untuk setiap $x, y \in R$ maka berlaku $x + y \in R$ (sifat tertutup).
2. Untuk setiap $x, y, z \in R$ maka berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ (sifat assosiatif).
3. Terdapat e $\in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku bahwa $x + e = e + x = x$ (eksistensi elemen identitas).
4. Untuk setiap $x \in R$, terdapat $(-x) \in R$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = e$ (eksistensi elemen invers).
5. Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$ (bersifat komutatif).
6. Untuk setiap $x, y \in R$ maka $x \cdot y \in R$ (tertutup).
7. Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (sifat assosiatif).
8. untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributif kanan) dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributif kiri).

Definisi 3. (Jimmie Gilbert dan Linda Gilbert,1992): Diberikan suatu ring R. Jika terdapat $e \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \cdot e = e \cdot x = x$ maka $e \in R$ disebut elemen satuan dan R dikatakan sebagai ring dengan elemen satuan. Jika terhadap perkalian R bersifat komutatif, maka R disebut ring komutatif.

Definisi 4. (Jimmie Gilbert dan Linda Gilbert,1992): Diberikan suatu ring R dengan e elemen satuan, dan diberikan $a \in R$. Jika $x \in R$ berlaku $a \cdot x = x \cdot a = e$, maka x adalah invers perkalian dari a.

Lapangan

Suatu lapangan adalah tipe dari ring. Adapun definisi dari lapangan dapat di lihat di bawah ini:
Definisi 5. (Jimmie Gilbert dan Linda Gilbert,1992): Diberikan F suatu ring. Maka F adalah sebuah lapangan jika memenuhi sifat :

1. F adalah ring komutatif.
2. F mempunyai elemen satuan e, dan $e \neq 0$.
3. Setiap elemen tak nol dari F mempunyai invers perkalian.

Bilangan rasional, bilangan real, dan bilangan kompleks adalah contoh dari lapangan. Kita akan melihat di akibat 2.1 bahwa jika n adalah bilangan prima, maka Z_n adalah lapangan.

Akibat 6. (Jimmie Gilbert dan Linda Gilbert,1992): Z_n adalah sebuah lapangan jika dan hanya jika n adalah bilangan prima.

Dalam contoh yang akan digunakan di bawah ini, perhitungan yang akan dilakukan kita menggunakan matriks yang entri-entrinya anggota dari himpunan Z_5 dan Z_6. Adapun perbedaan dari M_{Z_5} dan M_{Z_6} tersebut dapat di lihat dari penyelesaian di bawah ini.

1. Menentukan *Generalized Inverse* pada Matriks atas Z_n Menggunakan Aturan Algoritma

Berikut ini akan diberikan contoh matriks bujur sangkar atas Z_5 berordo 3×3 untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma. Z_5 ini sudah terbukti lapangan, karena telah memenuhi sifat-sifat lapangan.

Contoh 1:

Tentukan *generalized inverse* dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{Z_5}$ menggunakan aturan algoritma.

Penyelesaian :

Akan ditentukan *rank* dari matriks A sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} b_1 \leftrightarrow b_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + 3b_1 \\ b_3 + 3b_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} b_3 + b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi *rank* dari matriks A adalah 2.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut:

a. Diberikan matriks A dengan ordo 3×3 dengan $rk(A) = 2$, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 2. Notasikan dengan M_1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Menemukan invers matriks M_1, yaitu ${M_1}^{-1}$ kemudian tranposkan $({M_1}^{-1})^t$:

$${M_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$({M_1}^{-1})^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Dalam matriks A, diganti setiap elemen matriks M_1 dengan elemen matriks $({M_1}^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Transposkan matriks A, diperoleh:

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari matriks A adalah:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks A.

Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari A apabila berlaku $AG_1A = A$,

$$AG_1A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, terbukti $AG_1A = A,\ G_1$ adalah *generalized inverse* dari matriks A .

Dengan langkah-langkah yang sama, akan ditemukan *generalized inverse* yang lainnya pada matriks A. Dengan ditunjukkan $AGA = A,\ G$ adalah *generalized inverse* dari matriks A atas Z_5. Dari hasil di atas dapat dilihat bahwa *generalized inverse* dari matriks A atas Z_5 adalah tidak tunggal. Maka dari itu himpunan Z_5 merupakan lapangan.

Contoh 2 :

Berikut ini akan diberikan contoh matriks atas Z_6 yang berordo 3×4 untuk menentukan *generalized inverse*. Z_6 ini sudah terbukti ring komutatif dengan elemen satuan, karena telah memenuhi sifat-sifat ring komutatif dengan elemen satuan.

Tentukan *generalized inverse* dari matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in M_{Z_6}$ dengan menggunakan aturan algoritma.

Penyelesaian :

Akan ditentukan *rank* dari matriks B sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + b_1 \\ b_3 + 5b_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi *rank* dari matriks B adalah 3.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan algoritma adalah sebagai berikut:

a. Diberikan matriks B dengan ordo 3×3 dengan $rk(B) = 3$, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 3. Notasikan dengan M_1,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Temukan invers matriks M_1 , yaitu $M_1{}^{-1}$ kemudian tranposkan $(M_1{}^{-1})^t$, untuk mencari invers matriks M_1 diperoleh dari operasi baris elementer.

$$M_1{}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(M_1{}^{-1})^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

c. Dalam matriks B, diganti setiap elemen matriks M_1 dengan elemen matriks $(M_1{}^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol, yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

d. Transposkan matriks B , diperoleh:

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e. Hasilnya berupa matriks G_1, *generalized inverse* dari matriks B adalah:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks G_1 ini merupakan salah satu *generalized inverse* dari matriks B.

Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari B apabila berlaku $BG_1B = B$.

$$BG_1B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, terbukti $BG_1B = B,\ G_1$ adalah *generalized inverse* dari matriks B.

Dengan langkah-langkah yang sama, akan di tunjukkan *generalized inverse* yang lainnya, yaitu :

a. Diberikan matriks B dengan ordo 3×3 dengan $rk(B) = 3$, temukan sembarang matriks minor non-singular dengan orde 3. Notasikan dengan M_2,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Temukan invers matriks M_2, yaitu $M_2{}^{-1}$ kemudian tranposkan $(M_2{}^{-1})^t$, untuk mencari invers matriks M_2 diperoleh dari operasi baris elementer.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} b_2 + b_1 \\ b_3 + 5b_1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 + 4b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] (2^{-1})b_3$$

Matriks M_2 di atas tidak dapat dicari *generalized inverse* nya karena $2 \in Z_6$ tidak mempunyai invers terhadap perkalian pada Z_6, sehingga matriks M_2 tidak mempunyai *generalized inverse.*

2. Menentukan *Generalized Inverse* pada Matriks Atas Z_n Menggunakan Aturan Pendiagonalan Matriks

Contoh 3:

Tentukan *generalized inverse* dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{Z_5}$ menggunakan aturan pendiagonalan matriks.

Penyelesaian :

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *generalized inverse* dengan menggunakan aturan pendiagonalan matriks adalah sebagai berikut :

a. Diketahui matriks A ordo 3×3. Akan dicari matriks P dengan melakukan operasi baris elementer (OBE).

Sehingga diperoleh matriks P :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari untuk matriks Q dengan melakukan operasi elementer kolom (OKE).

Sehingga diperoleh matriks Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Setelah didapatkan matriks P dan matriks Q, selanjutnya akan ditentukan matriks Δ dengan menggunakan persamaan $\Delta = PAQ$, yaitu :

$$\Delta = PAQ$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Kemudian akan dicari invers matriks Δ^- sehingga diperoleh:

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Selanjutnya akan ditentukan matriks G_1 yaitu $G_1 = Q\Delta^- P$, yaitu :

$$G_1 = Q\Delta^- P$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan G_1 adalah *generalized inverse* dari A apabila berlaku $AG_1A = A$.

$$AG_1A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, terbukti $AG_1A = A, G_1$ adalah *generalized inverse* dari matriks A. Matriks G_1 ini tidak tunggal. Untuk menentukan *generalized inverse* lainnya dengan langkah-langkah yang sama.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, maka diperoleh suatu invers dari matriks atas Z_n dengan metode *generalized inverse*, terdapat dua aturan yaitu algoritma dan aturan pendiagonalan matriks. Sehingga dapat diperoleh beberapa kesimpulan adalah sebagai berikut:

1. Apabila $\boldsymbol{n}$ merupakan bilangan prima, maka $\boldsymbol{Z_n}$ adalah lapangan dan matriks atas $\boldsymbol{Z_n}$ pasti mempunyai *generalized inverse*.
2. Apabila $\boldsymbol{n}$ bukan bilangan prima, maka $\boldsymbol{Z_n}$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.
3. Apabila $\boldsymbol{n}$ bukan bilangan prima, maka matriks atas $\boldsymbol{Z_n}$ mempunyai *generalized inverse* jika dalam pengerjaan tidak dibutuhkan invers dari suatu elemen atas $\boldsymbol{Z_n}$ yang tidak mempunyai invers terhadap perkalian.

Daftar Pustaka

[1] Adi, Ben-Israel, N.E. Greville, Thomas. 1973. *Generalized Inverse Theory and Application*. Second Edition, Canadian Mathematical Society Societe mathematique du canada.
[2] Anton, Howard dan Rorres, Chriss. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* Edisi Kedelapan. Erlangga. Jakarta.
[3] Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier*, Jilid 1. Interaksara. Batam Center.

[4] Gilbert, Jimmie, dan Gilbert Linda. 1992. *Elements of Modern Algebra*. KENT Publishing Company. Boston.
[5] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freeman and Company. New York.
[6] Murnita, Desi. 2012. *Penyelesaian Invers Matriks Menggunakan Metode Generalized Inverse*. Skripsi. UIN SUSKA RIAU. Pekanbaru.
[7] Otero,J. 1998. *Generalized Inverse matrices and the Gauss-Markov Theorema*, Seccion Departamental de Astronomia y Geodesia Universidad Complutense de Madrid. Publicacion num 192.
[8] Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier*. Rekayasa Sains. Bandung.
[9] Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit.* Edisi ketiga. Informatika Bandung. Bandung.
[10] Udjiani, Titi. 2004. *Invers Matriks Moore Penrose Atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan.* Vol.7. No. 1. 20-30. Program Studi Matematika FMIPA. Universitas Diponegoro. Semarang.