

Solusi Optimal Masalah Penugasan Menggunakan Metode Alternatif Hungarian

Fahrudin Muhtarulloh¹, Annisa Dea Novita²

^{1,2} Prodi Matematika, UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Jl. A.H Nasution No. 105 Cibiru, Kota Madya Bandung 40614

Email: fahrudin.math@uinsgd.ac.id¹, annisanovita45@gmail.com²

*Korespondensi penulis : fahrudin.math@uinsgd.ac.id

Abstrak

Masalah penugasan membahas pengalokasian sejumlah sumber ke sejumlah tujuan, dengan tujuan memaksimalkan suatu keuntungan. Penelitian studi literatur ini membahas tentang penyelesaian masalah penugasan kasus minimasi dengan menggunakan metode baru yaitu Metode Alternatif. Metode yang dibentuk dengan bantuan metode Hungarian ini diselesaikan dengan ukuran data 5×5 yang bertujuan untuk meminimalkan total biaya yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan. Penyelesaian dengan metode Alternatif dimulai dengan cara mengurangi setiap baris dan kolom dengan elemen terkecilnya, kemudian tinjau posisi nol setelah itu reduksi matriks dengan reduksi baris dan kolom yang sudah ditugaskan, ulangi reduksi baris dan kolom sampai menemukan solusi optimal agar setiap pekerja mempunyai pekerjaan masing-masing. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh bahwa, pekerja I ditugaskan melakukan pekerjaan A, pekerja II ditugaskan melakukan pekerjaan D, pekerja III ditugaskan melakukan pekerjaan C, pekerja IV ditugaskan melakukan pekerjaan B, dan pekerja V ditugaskan melakukan pekerjaan E. Maka penugasannya adalah: I→A, II→D, III→C, IV→B, V→E. Dari hasil penugasannya, maka didapat solusi optimal untuk biaya minimumnya adalah $1+1+3+1+4 = \$10$. Pada artikel ini didapatkan hasil solusi optimal menggunakan metode alternatif sama dengan hasil solusi optimal menggunakan metode Hungarian.

Kata kunci: Algoritma Hungarian, Masalah Penugasan, Metode Alternatif, Optimasi, Riset Operasi.

Abstract

The assignment problem deals with allocating several resources to several objectives, to maximize a profit. This literature study research discusses solving the problem of assignment of minimization cases by using a new method, namely the Alternative Method. The method that was formed with the help of the Hungarian method was completed with a data size of 5×5 which aims to minimize the total costs incurred by a company. Solution with the Alternative method begins by reducing each row and

column with its smallest element, then reviewing the zero position after that matrix reduction by reducing the rows and columns that have been assigned, repeating row and column reduction until finding the optimal solution so that each worker has their job. . Based on the results of this study, it was found that, worker I was assigned to do work A, worker II was assigned to do work D, worker III was assigned to do work C, worker IV was assigned to do work B, and worker V was assigned to do work E. So the assignments were: I→A , II→D, III→C, IV→B, V→E. From the assignment result, the optimal solution for the minimum cost is $1+1+3+1+4= \$10$. In this article, the results of the optimal solution using the Alternative method are the same as the results of the optimal solution using the Hungarian method.

Keywords: Alternative Method, Assignment Problem, Hungarian Algorithm, Operation Research, Optimization.

Diterima : 17-09-2022 , Disetujui : 13-10-2022, Terbit Online : 14-10-2022

1. Pendahuluan

Masalah penugasan (*assignment problem*), seperti juga masalah transportasi merupakan suatu kasus khusus yang ditemui dalam pemrograman linear. Permasalahan penugasan atau *assignment problem* adalah suatu persoalan dimana harus melakukan penugasan terhadap sekumpulan orang kepada sekumpulan job yang ada, sehingga tepat satu orang yang bersesuaian dengan tepat satu job yang ada [1], [2]. Dalam model penugasan pekerja melambangkan sumber dan pekerjaan melambangkan tujuan dengan jumlah persediaan pada setiap sumber tepat 1. Sebagai contoh $n=5$ orang dapat ditugaskan untuk 5 pekerjaan. Maka jumlah yang memungkinkan adalah $5!=120$. Alokasi seperti ini akan memakan waktu lebih lama. Dengan kata lain, tujuan masalah penugasan adalah untuk menetapkan setiap tugas yang sesuai pada pekerja sehingga total pengeluaran sumber daya untuk menyelesaikan semua tugas dapat dioptimalkan [3]–[5].

Permasalahan yang akan dicari solusinya adalah meminimumkan biaya penugasan sehingga dalam penugasan mengeluarkan biaya seminimum mungkin. Terdapat banyak metode untuk menciptakan teknik perhitungan yang lebih mudah untuk masalah ini. Sebagian besar masalah penugasan menggunakan metode Hungarian karena dapat memberikan hasil optimal. Akan tetapi metode Hungarian metode yang sudah sangat lama yaitu pada tahun 1916 [4], [6]–[9]. Dalam artikel ini akan digunakan metode baru untuk menyelesaikan masalah penugasan yaitu metode alternatif. Pada bagian akhir akan disajikan perbandingan metode alternatif dan metode Hungarian, seperti yang sudah pernah dilakukan dalam penelitian-penelitian terdahulu [10][11][12][13].

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur yang mana menggunakan metode dan data yang diambil dari jurnal terbaru.

2.1 Metode Hungarian

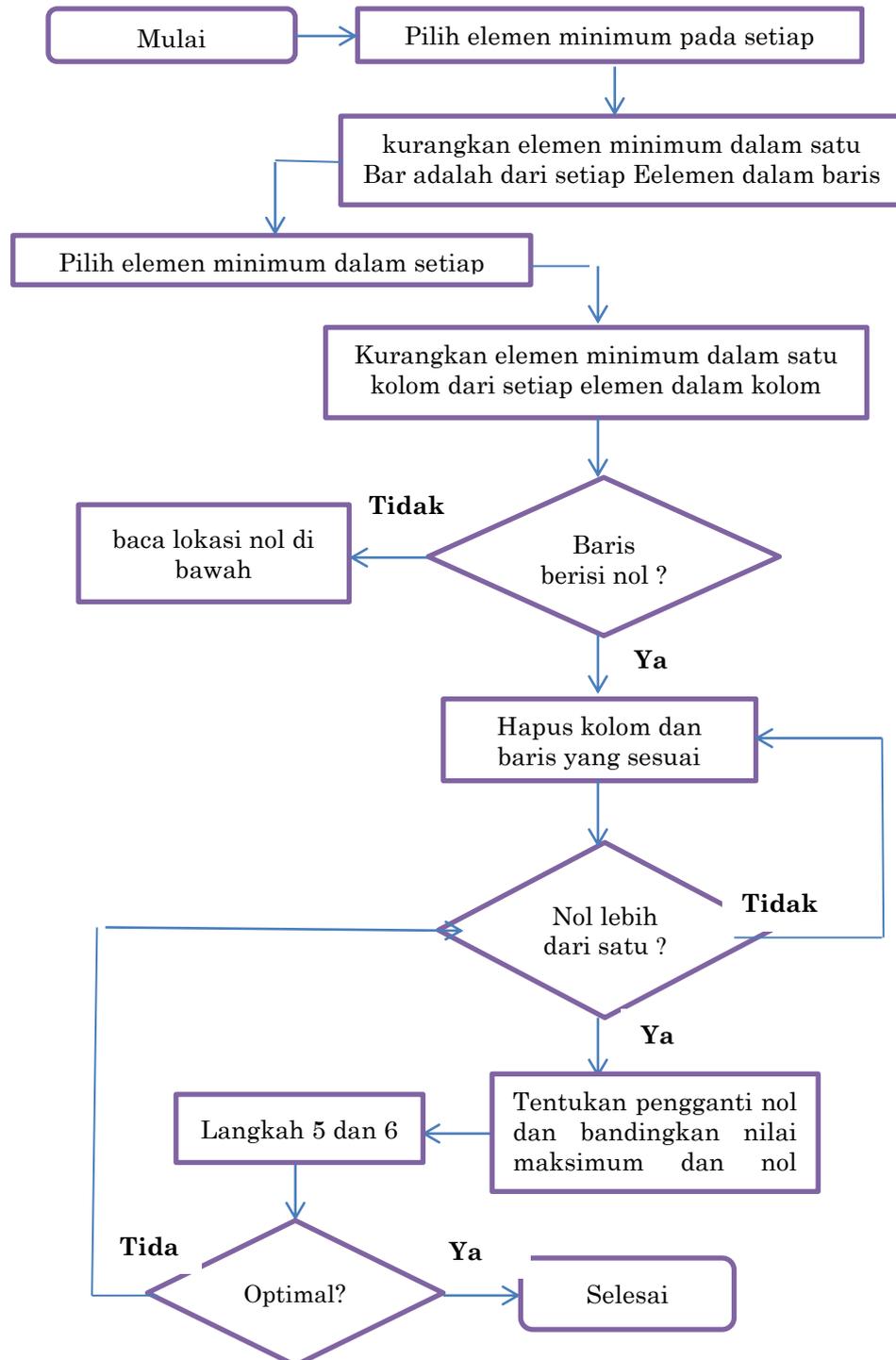
Metode hungarian merupakan metode yang memodifikasi baris dan kolom dalam matriks efektivitas hingga komponen nol tunggal muncul di setiap baris atau kolom yang dapat dipilih sebagai alokasi penugasan [14], [15]. Langkah-langkah metode hungarian sebagai berikut [16], [17]: 1) Cek tabel penugasan apakah seimbang atau tidak. Jika tak

seimbang, tambahkan dummy. Jika seimbang lanjut ke langkah selanjutnya; 2) Cari minimum dari setiap baris lalu kurangkan nilai baris tersebut dengan nilai minimumnya dari setiap nilai dari baris yang sesuai; 3) Cari minimum dari setiap kolom lalu kurangkan nilai kolom tersebut dengan nilai minimumnya dari setiap nilai dari kolom yang sesuai; 4) Tarik garis yang memiliki unsur nol seminimum mungkin. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom berarti pemecahan sudah optimal; 5) Pada nilai yang tidak terkena garis, pilih nilai minimum, kemudian kurangi nilai yang tidak terkena garis dengan nilai minimumnya, kemudian tambahkan nilai minimum pada nilai yang terkena garis 2 kali dan nilai yang terkena garis 1 kali bernilai tetap; 6) Tentukan apakah sudah terdapat nilai nol pada baris dan kolom yang berbeda, apabila sudah terdapat nol di setiap baris dan kolom yang berbeda maka sudah didapatkan hasil yang optimal (jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom berarti pemecahan sudah optimal); 7) Tentukan solusi optimal; 8) Selesai.

2.2 Metode Alternatif

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah penugasan dengan Metode Alternatif sebagaimana terdapat dalam [12] adalah sebagai berikut: 1) Kurangi elemen terkecil dari setiap baris dari setiap elemen dari baris yang sesuai; 2) Kurangi elemen terkecil dari setiap kolom dari setiap elemen dari kolom yang sesuai; 3) Pertimbangkan posisi nol di setiap baris. Jika baris hanya berisi satu nol maka tetapkan untuk baris yang sesuai dan hapus baris dan kolom yang sesuai setelah alokasi. Jika tidak, baca lokasi nol di bawah untuk proses lebih lanjut; 4) Jika terdapat nol lebih dari satu lalu tentukan pengganti nol dan bandingkan nilai maksimum dan nol penugasan; 5) Ulangi langkah (3), dan (4); 6) Temukan solusi optimal.

Langkah-langkah di atas dapat disusun dalam sebuah algoritma seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Flowchart Metode Alternatif

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini akan diambil dua buah studi kasus. Studi kasus pertama dimana terdapat 5 pekerja yang tersedia untuk 5 pekerjaan yang berbeda. Dari catatan sebelumnya, biaya (dalam US dollar) dari setiap pekerja untuk menyelesaikan setiap pekerjaan dapat dilihat di Tabel 1 berikut [12].

Tabel 1. Masalah penugasan

		Pekerjaan				
		A	B	C	D	E
Pekerja	I	1	3	2	3	6
	II	2	4	3	1	5
	III	5	6	3	4	6
	IV	3	1	4	2	2
	V	1	5	6	5	4

Untuk menyelesaikan masalah penugasan pada Tabel 1 digunakan algoritma sebagai berikut:

Langkah 1 Kurangi elemen terkecil dari setiap baris dari setiap elemen dari baris yang sesuai.

Langkah 2 Kurangi elemen terkecil dari setiap kolom dari setiap elemen dari kolom yang sesuai.

Hasil langkah tersebut dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Matriks hasil pengurangan elemen terkecil tiap baris dan kolom

		Pekerjaan				
		A	B	C	D	E
Pekerja	I	0	2	1	2	4
	II	1	3	2	0	3
	III	2	3	0	1	2
	IV	2	0	3	1	0
	V	0	4	5	4	2

Selanjutnya tinjau posisi nol (0) dari Tabel 2, sehingga diperoleh hasil seperti Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Tinjau posisi nol (0)

Baris	Kolom
I	A
II	D
III	C
IV	B,E
V	A

Dari Tabel 3 diperoleh hasil penugasan yaitu, tugaskan II →D dan hapus baris dan kolom yang bersesuaian dari matriks di atas.

Langkah 3 lakukan reduksi baris dan kolom, sehingga diperoleh matriks pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Matriks tereduksi

		Pekerjaan			
		A	B	C	E
Pekerja	I	0	2	1	4
	III	2	3	0	2
	IV	2	0	3	0
	V	0	4	5	2

Selanjutnya tinjau posisi nol (0) kembali dari Tabel 4, sehingga diperoleh hasil seperti Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Tinjau posisi nol (0)

Baris	Kolom
I	A
III	C
IV	B,E
V	A

Dari Tabel 5 diperoleh penugasan, yaitu tugaskan III →C dan hapus baris dan kolom yang bersesuaian dari matriks tersebut. Dengan melakukan kembali langkah 3 sampai semua penugasan selesai dilakukan, diperoleh hasil optimal sebagai berikut: Pekerja I ditugaskan melakukan pekerjaan A dengan biaya minimum sebesar 1; Pekerja II ditugaskan melakukan pekerjaan D dengan biaya minimum sebesar 1; Pekerja III ditugaskan melakukan pekerjaan C dengan biaya minimum sebesar 3; Pekerja IV ditugaskan melakukan pekerjaan B dengan biaya minimum sebesar 1; Pekerja V ditugaskan melakukan pekerjaan E dengan biaya minimum sebesar 4. Sehingga biaya penugasan minimal sebesar : $1+1+3+1+4 = \$10$

Studi kasus kedua, suatu perusahaan memiliki lima pekerjaan, pekerjaan I, II, III, IV, V dan lima pekerja A, B, C, D, E. Dengan mempertimbangkan biaya pada setiap pekerjaan (dalam satuan dollar), tentukan penugasan setiap pekerja ke pekerjaan yang akan menghasilkan biaya paling minimum [13]. Untuk lebih jelasnya ditunjukkan pada Tabel 6 berikut.

Tabel 6. Matriks Biaya penugasan

		Pekerjaan				
		A	B	C	D	E
Pekerja	I	12	8	7	15	4
	II	7	9	1	14	10
	III	9	6	12	6	7
	IV	7	6	14	6	10
	V	9	6	12	10	6

Dengan menggunakan algoritma yang sama seperti pada studi kasus pertama, diperoleh solusi optimal penugasan studi kasus kedua, yaitu: Pekerja I ditugaskan melakukan pekerjaan E dengan biaya minimum sebesar 4; Pekerja II ditugaskan melakukan pekerjaan C dengan biaya minimum sebesar 1; Pekerja III ditugaskan melakukan pekerjaan D dengan biaya minimum sebesar 6; Pekerja IV ditugaskan melakukan pekerjaan A dengan biaya minimum sebesar 7; Pekerja V ditugaskan melakukan pekerjaan B dengan biaya minimum sebesar 6. Sehingga diperoleh biaya penugasan paling minimum sebesar $4+1+6+7+6 = \$24$.

Selanjutnya dicari solusi optimal dari dua kasus tersebut menggunakan metode Hungarian. Terakhir dilakukan perbandingan hasil solusi optimal kedua kasus tersebut dengan menggunakan metode alternatif dan metode Hungarian seperti diperlihatkan pada Tabel 7 berikut ini.

Tabel 7. Perbandingan solusi optimal hasil metode alternatif dan Hungarian

Studi Kasus	Metode Alternatif	Metode Hungarian
1	10	10
2	24	24

Dari Tabel 7 dapat dilihat bahwa hasil solusi optimal dengan metode alternatif studi kasus pertama maupun studi kasus kedua memiliki nilai yang sama besar dengan yang diperoleh menggunakan metode Hungarian.

4. Kesimpulan

Metode Alternatif merupakan metode baru yang dirancang untuk memudahkan dalam menyelesaikan masalah penugasan. Dari dua kasus pada penelitian ini diperoleh solusi optimal yang sama dengan solusi optimal menggunakan metode Hungarian.

Daftar Pustaka

- [1] Y. R. W. Utami and S. Siswanti, "Modul Perkuliahan Sistem Pendukung Keputusan." STMIK Sinar Nusantara Surakarta, 2020.
- [2] I. Masudin, M. F. Ibrahim, and G. Yandeza, *LINEAR PROGRAMMING DENGAN R:(Aplikasi untuk Teknik Industri)*. UMMPress, 2018.
- [3] S. Basriati, E. Safitri, and R. Erawati, "Optimasi Penugasan Karyawan pada Usaha Bunga Wisuda Pekanbaru Menggunakan Metode Hungarian dan Metode Alternate Mansi," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 7, no. 1, pp. 38–46, 2021.
- [4] S. Basriati and A. Lestari, "Penyelesaian Masalah Penugasan Menggunakan Metode Hungarian dan Pinalti (Studi Kasus: CV. Surya Pelangi)," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 1, pp. 75–81, 2017.
- [5] E. Rahmawati, N. Satyahadewi, and F. Fran, "Optimalisasi Masalah Penugasan Menggunakan Metode Hungarian (Studi kasus pada PT Pos Indonesia (Persero) Pontianak)," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 4, no. 03, 2015.
- [6] S. Mardiani, F. L. Sari, C. Novita, Z. A. Fanani, and D. A. Afandhi, "Penerapan Metode Hungarian dalam Optimasi Penugasan Karyawan CV. Paksi Teladan," *Bull. Appl. Ind. Eng. Theory*, vol. 1, no. 1, 2020.
- [7] D. T. Pratama and H. S. Kurniawan, "Optimasi Masalah Penugasan Menggunakan Metode Hungarian untuk Meminimalkan Waktu Produksi," *Bull. Appl. Ind. Eng. Theory*, vol. 1, no. 1, 2020.
- [8] O. Hia, "Implementasi Metode Hungarian Dalam Penugasan Karyawan (Studi Kasus: PT. Jefrindo Consultant)," *JURIKOM (Jurnal Ris. Komputer)*, vol. 6, no. 1, pp. 85–92, 2019.
- [9] E. R. Tsani, N. K. T. Tastrawati, and K. Sari, "Analisis Sensivitas Model Penugasan Dengan Metode Hungarian," *E-Jurnal Mat*, vol. 10, no. 1, p. 41, 2021.
- [10] J. Dutta and S. C. Pal, "A note on Hungarian method for solving assignment problem," *J. Inf. Optim. Sci.*, vol. 36, no. 5, pp. 451–459, 2015.
- [11] E. R. Wulan, A. R. Devi, and D. Nuraiman, "The comparative analysis of Hungarian assessment, matrix ones assignment and alternate mansi method in solving assignment problem," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1402, no. 7, p. 77090.
- [12] N. Rai, K. Rai, and A. J. Khan, "New Approach to Solve Assignment Problem." IJISRT, 2017.
- [13] S. Singh, G. C. Dubey, and R. Shrivastava, "A comparative analysis of assignment problem," *IOSR J. Eng.*, vol. 2, no. 8, pp. 1–15, 2012.
- [14] A. Dewanta and R. P. Sari, "Analisa Optimalisasi Waktu Kerja Karyawan dengan Menggunakan Metode Hungarian (Studi Kasus Bengkel Jaya Battery Motor)," *JURMATIS J. Manaj. Teknol. dan Tek. Ind.*, vol. 3, no. 2, pp. 92–102, 2021.
- [15] B. Prasetyo and A. M. Lubis, "Penyelesaian Masalah Penugasan pada Drafter Menggunakan Metode Hungarian dan Aplikasi POM-QM," *Bull. Appl. Ind. Eng. Theory*, vol. 1, no. 1, 2020.
- [16] B. Gabrovšek, T. Novak, J. Povh, D. Rupnik Poklukar, and J. Žerovnik, "Multiple Hungarian method for k-assignment problem," *Mathematics*, vol. 8, no. 11, p. 2050, 2020.

- [17] E. N. Cahya and S. H. Hasanah, "Penerapan Metode Hungarian Dan Aplikasi QM Untuk Meminimalisasi Komplain Kebersihan Dari Klien," *J. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 23, no. 1, pp. 20–32, 2022.