



Model Modifikasi Holling-Tanner dengan Interaksi Kanibalisme dan Sumber Makanan Alternatif pada Predator

Rian Ade Pratama¹, Dessy R Suryani², Maria F V Ruslau³

^{1,2,3} Pendidikan Matematika, Universitas Musamus

Jl. Kamizaun Mopah Lama, Merauke, Papua, 99611

Email: pratama@unmus.ac.id¹, suryani_fkip@unmus.ac.id², maria_fkip@unmus.ac.id³

*Korespondensi penulis : pratama@unmus.ac.id

Abstrak

Penelitian ini mengkaji model pertumbuhan populasi model predator-prey Holling-Tonner yang dimodifikasi. Pertumbuhan model predator-prey yang dianalisis mengadopsi pertumbuhan logistik. Sementara pada fungsi pemangsaan mengikuti model Holling Type II. Variabel yang tidak kalah penting dalam penelitian ini adalah adanya sumber alternatif bagi predator. Konsep seperti ini sangat realistis untuk dipertimbangkan, mengingat banyak spesies predator yang berganti sumber makanan, dikarenakan sumber makanan yang terbatas. Analisis kestabilan dilakukan pada model untuk melihat keberlangsungan populasi dalam jangka waktu yang lama dengan tingkat interaksi yang sesuai. Dari empat titik equilibrium non-negatif yang dihasilkan pada model, pengujian kestabilan hanya dilakukan pada satu titik equilibrium. Secara matematis dilakukan uji Routh-Hurwitz, dengan matriks Jacobian yang bersesuaian. Simulasi numerik menjadi asumsi realistis awal bagi keberlangsungan hidup masing-masing spesies dan melihat karakter dari masing-masing spesies tersebut. Titik equilibrium yang dipilih menjadi pegujian pada kesetabilan asimtotik lokal dan kurva pertumbuhan. Kemungkinan adanya perpindahan sumber makanan sangat mungkin terjadi, sementara interaksi kanibalisme pada model yang dikembangkan tidak memberikan pengaruh yang signifikan pada masing-masing spesies.

Kata Kunci: Kanibalisme, makanan alternatif dan Predator-Prey.

Abstract

This study examines a modified Holling-Tonner predator-prey model of population growth. The growth of the predator-prey model analyzed adopts logistic growth. Meanwhile, the response function follows the Holling Type II. Another important variable in this study is the existence of alternative sources for predators. Such a concept is very realistic to consider, considering that many species of predator change food sources, due to limited food sources. Stability analysis is carried out on the model to see the sustainability of the population over a long period of time with the appropriate level of interaction. The four non-negative equilibrium points generated in the model, stability testing is only carried out at one equilibrium point. The Routh-Hurwitz test was carried out, with the corresponding Jacobian matrix. Numerical simulation becomes the initial realistic assumption for the survival of each species and looks at the character of each species. The chosen equilibrium point is a test of the stability of asymptotic locally and trajectories. The possibility of a transfer of food sources is very possible, while the interaction of cannibalism in the developed model does not have a significant effect on each species.

Keywords: Alternative food, cannibalism and Predator-Prey.

Diterima : 09-06-2022 , Disetujui : 11-07-2022, Terbit Online : 28-07-2022

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dalam dunia ekologis sangat dinamis dan banyak mengalami perubahan. Delik pada kasus spesies makhluk hidup dan ekosistem masih sangat menarik untuk menjadi tema unggulan riset ilmiah [1]. Perubahan iklim, ketergantungan sumber makanan, interaksi antar spesies, menarik untuk dipahami baik secara biologis maupun matematis. Sifat interaksi antar spesies misalnya, selalu memiliki tingkat kompleks yang tinggi [2]. Tingkat interaksi antar spesies dalam suatu ekosistem sangat penting secara ekologis dan matematika terapan. Tujuan dari analisis ini adalah memperoleh gambaran perilaku spesies predator yang memiliki sifat kanibalisme dan mencari alternative makanan utama. Analisis lain yang tidak kalah pentingnya adalah memahami perilaku jangka panjang, dan melihat prediksi manajemen perlawanan atau penyesuaian masing-masing spesies [3][4][5][6].

Setiap pemodelan matematika selalu memiliki kompleksitas masing-masing sesuai dengan asumsi yang dibangun pada model tersebut. Pada pemodelan dengan mengadopsi Holling-Tanner karakteristik matematis tertentu pada domain temporal [7]. Rumusan matematis model dengan Holling-Tanner predator-prey model diberikan oleh

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{wxy}{a_1 + x}, \\ \frac{dy}{dt} &= ry\left(1 - \frac{y}{hx}\right) + \frac{wxy}{a_1 + x}\end{aligned}\tag{1}$$

Model predator-prey Holling-Tanner telah banyak digunakan secara luas pada model matematika. Konsep ekologi yang dimodelkan didunia nyata dikembangkan dari interaksi antar spesies [8]. Holling-Tanner digunakan untuk menyelidiki perilaku multi-osilasi pada spesies *Microtus agrestis*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa osilasi yang terbentuk karena spesies mangsa paling sedikit menyebabkan ketergantungan dengan

sifat isolasi. Karakteristik pada persamaan $\frac{y}{hx}$ pada sistem (1) disebut juga sebagai Leslie-Gower [9][10]. Hilangnya populasi spesies prey karena kelangkaan makanan favoritnya. Akan tetapi spesies prey juga dapat mengganti sumber makanan utamanya tergantung pada proporsi kepadatan populasi prey. Pada spesies predator sifat yang melekat lebih generalis, dapat hidup pada lingkungan yang berbeda dan memanfaatkan sumber makanan secara maksimal. Ada banyak asumsi yang dapat dibentuk untuk memodelkan sumber makanan alternatif bagi predator. Sementara pendekatan pada spesies prey sebisa mungkin tidak memiliki interaksi tambahan seperti persaingan atau mutualisme, pada model yang mengembangkan makanan alternatif pada spesies predator.

2. Metode Penelitian

2.1 Landasan Teori

Kerangka standar yang digunakan dalam menyusun model matematis berdasarkan prinsip yang sederhana. Makanan alternatif pada spesies predator diasumsikan banyak dan berlimpah untuk terus dikonsumsi [11][12]. Rumusan tersebut sangat realistis dipertimbangkan karena pada ekosistem pasti terdapat lebih dari satu jenis spesies prey [13]. Secara matematis asumsi yang diberikan pada makanan alternatif spesies predator adalah konstan. Sehingga persamaan daya dukung untuk predator ditambahkan konstanta yang selalu positif. Secara matematis persamaan Leslie-Gower pada (1) dikembangkan menjadi $\frac{y}{hx+c}$. Dari persamaan tersebut dapat diberikan penjelasan bahwa, ketika terdapat pengurangan dramatis makanan favoritnya predator dapat beralih ke sumber makanan yang lain [14][15]. Akan tetapi, secara matematis terdapat fakta bahwa pertumbuhan populasi mangsa tidak tersedia dalam jumlah yang banyak. Secara matematis pengembangan model tersedia sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{wxy}{a_1 + x}, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{hx+c} \right) + \frac{wxy}{a_1 + x}, \end{aligned} \quad (2)$$

pada sistem matematis (2), x dan y menunjukkan masing-masing ukuran populasi prey dan predator. Populasi prey dan predator mengadopsi fungsi pertumbuhan logistik dan daya dukung lingkungan yang sangat bergantung. Sementara itu r dan s adalah laju pertumbuhan intrinsik untuk prey dan predator. h adalah ukuran kualitas prey sebagai makanan predator masing-masing. k adalah *carrying capacity* masing-masing spesies. w adalah tingkat pemangsaan pada interaksi predator dan prey. a_1 dan a_2 adalah *half saturated level*. c adalah tingkat predator yang diberi makan oleh sumber makanan alternatif. Fungsi pemangsaan predator $\frac{axy}{x+a}$ adalah fungsi hiperbolik yang biasa disebut sebagai fungsi respon Holling Type II [9]. Semua asumsi parameter yang diberikan adalah positif dan untuk alasan ekologis yang rasional dengan $a < k$.

Asumsi lain yang dibangun dalam penelitian ini adalah, pada laju peningkatan pertumbuhan intrinsik predator, spesies mangsa yang terisolasi akan lebih mudah di makan oleh predator. Persebaran populasi predator lebih luas dan cepat dari pada populasi spesies prey [16]. Asumsi yang tidak kalah penting dan menjadi fokus penelitian

ini adalah pada predator diberikan interaksi kanibalisme. Hal ini sangat realistis dalam kehidupan ekosistem terdapat spesies predator yang tidak hanya memangsa akan tetapi bertengkar atau menjaga gengsi/marwah/eksistensi spesies [17][18]. Bentuk respon kanibalisme pada perilaku spesies predator yang berinteraksi merupakan salah satu masalah ilmiah yang menarik dalam dunia riset ekologis [19][20]. Predator bergerak mendekati mangsa sebagai sumber makanan, dan mangsa menjauh dari ancaman predator. Siklus seperti ini terus menerus berlangsung selama proses pemangsaan predator-prey ada dan menuju kestabilan ekosistem. Beberapa hasil penelitian yang memfokuskan pada bentuk kanibalisme spesies predator terjadi secara alamiah. Interaksi kanibalisme juga sering terjadi pada kondisi kepadatan populasi yang tinggi dan ketersediaan makanan yang terbatas, atau pada waktu masa transisi proses pencarian makanan yang baru [21]. Secara matematis bentuk fungsi kanibalisme yang diadopsi adalah $f(y) = \frac{\alpha y^2}{y + b}$, dimana α adalah laju kanibalisme dan b adalah konstanta *saturation*.

Kanibalisme tersebut sangat bergantung pada ketersediaan makanan dan kepadatan spesies prey. Rumusan akhir model penelitian adalah,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{wxy}{a_1 + x}, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{hx + c} \right) + \frac{wxy}{a_1 + x} - \frac{\alpha y^2}{y + a_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

pada Model (3) juga dilakukan analisis dimensi dari variabel yang dirumuskan, analisis dimensi Model (3) dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Simbol dan Nilai Parameter Model (3)

Simbol	Dimensi	Nilai Parameter
x	$[N]$	-
y	$[N]$	-
k	$[N]$	100
r	$[T]^{-1}$	10.5
s	$[T]^{-1}$	1.9
w	$[T]^{-1}$	0.55
α	$[T]^{-1}$	0.02
a_1	$[N]$	8
a_3	$[N]$	3
h	-	0.22
c	$[N]$	0.01

2.2 Metode Penelitian

Penelitian yang dikembangkan dalam penelitian ini adalah penelitian studi pustaka, dengan beberapa tahapan penelitian, diantaranya;

a. Studi Literatur

Pada bagian studi literatur kerangka *state of the art* penelitian dibuat dari beberapa jurnal bereputasi yang sesuai dengan topik penelitian. Prioritas diberikan pada jurnal yang memiliki kebaharuan, relevan dan mampu memberikan solusi pada permasalahan penelitian.

b. Rumusan model matematika

Pada tahapan ini rumusan pemodelan matematika adalah bentuk kontruksi pemodelan baru dari asumsi yang baru dikenakan.

c. Analisis equilibrium

Bagian analisis keseimbangan diberikan dengan melihat titik equilibrium dalam model yang dibentuk. Titik equilibrium non-negatif menjadi pertimbangan dalam proses formulasi model yang telah sesuai dengan asumsi yang digunakan.

d. Analisis Kestabilan model

Pada bagian analisis kestabilan titik equilibrium dilakukan pada beberapa titik yang memungkinkan. Fokus penelitian dan pembahasan model yang dikonstruksi adalah pada analisis titik keseimbangan interior.

e. Simulasi model

Pada simulasi model yang dikonstruksi, parameter memberikan pengaruh yang signifikan terhadap keberhasilan penelitian. Keseluruhan parameter yang diambil beberapa dibangun dari kontruksi asumsi dan mengadopsi penelitian yang relevan. Pada bagian ini juga akan diperlihatkan skema pertumbuhan populasi menuju keseimbangan dengan trajectories.

f. Penarikan kesimpulan

Pada bagian penarikan kesimpulan, analisisnya dirangkum dari simulasi numerik terhadap model yang dikonstruksi. Hasil yang diharapkan adalah adanya titik keseimbangan interior yang stabil dan memberikan dampak keberlanjutan pertumbuhan populasi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Analisis Equilibrium

Pada Model (3) terdapat 9 titik equilibrium yang menjadi solusi diferensial model.

Equilibrium point pada Model (3) diperoleh dengan kondisi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Masing-

masing equilibrium non-negatif yang relevan untuk dipertimbangkan berjumlah 5 equilibrium, sementara sisanya adalah equilibrium negatif. Pada bagian simulasi numerik akan diperlihatkan secara detail equilibrium, karena pada bagian ini hanya dilibatkan equilibrium yang non-negatif dan relevan. Adapun titik equilibrium non-negatif yang muncul dari model (3) adalah $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (0, y_1^*)$, $E_2 = (x_2^*, 0)$ dan $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$.

Titik equilibrium yang paling relevan untuk di pertimbangkan adalah $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$. Persamaan diferensial yang terlibat dalam model (3) adalah quintik-polinomial.

$$b_5(x)^5 + b_4(x)^4 + b_3(x)^3 + b_2(x)^2 + b_1(x) + b_0 = 0, \quad (4)$$

dimana,

$$b_5 = r^2 s,$$

$$b_4 = -chkrw + hkrsw + hkrw^2 - 2ksr^2 + 3sa_1 r^2,$$

$$b_3 = chk^2 rw - 2ckhrwa_1 - hk^2 rsw - hk^2 rw^2 + 2hkrswa_1 + hkrw^2 a_1 - c^2 krw + ckrsw + ckrw^2 + k^2 r^2 s - 6kr^2 sa_1 - krswa_3 + 3sa_1^2 r^2,$$

$$b_2 = 2chk^2 rwa_1 - ckhrwa_1^2 - 2hk^2 rswa_1 - hk^2 rw^2 a_1 - hk^2 sw^2 a_3 + hkrswa_1^2 + c^2 k^2 rw - 2c^2 krwa_1 - ck^2 rsw - ck^2 rw^2 + 2ckrswa_1 + ckrw^2 a_1 + 3k^2 r^2 sa_1 + k^2 rswa_1 - 6kr^2 sa_1^2 - 2krswa_1 a_3 + r^2 sa_1^2,$$

$$b_1 = chk^2 rwa_1^2 - k^2 hrwa_1^2 - hk^2 sw^2 a_1 a_3 + 2c^2 k^2 rwa_1 - c^2 krwa_1^2 - 2ck^2 rswa_1 - ck^2 rw^2 a_1 - ck^2 sw^2 a_3 - ck^2 w^3 a_3 + ckrswa_1^2 + 3k^2 r^2 sa_1^2 + 2k^2 rswa_1 a_3 - 2kr^2 sa_1^3 - krswa_1^2 a_3,$$

$$b_0 = c^2 k^2 rwa_1^2 - ck^2 rswa_1^2 - csa_1 a_3 k^2 w^2 + k^2 r^2 sa_1^3 + k^2 r^2 sa_1^3 + k^2 rswa_1^2 a_3.$$

Pada persamaan quintik (3) diperoleh akar solusi persamaan non-negatif. Akar non-negatif tersebut dipilih untuk pengujian titik kestabilan atau disebut equilibrium asimtotik lokal. Analisis pada titik equilibrium $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$ menggunakan matriks Jacobian, adapun pengujiannya adalah sebagai berikut,

$$M(E_3) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

dimana,

$$m_{11} = \frac{r(k-2x)a_1^2 + (2rx(k-2x) - wyk)a_1 + rx^2(k-2x)}{k(a_1+x)^2},$$

$$m_{12} = -\frac{wx}{(a_1+x)},$$

$$m_{21} = \frac{sy^2 h}{(hx+c)^2} + \frac{wy}{a_1+x} - \frac{wxy}{(a_1+x)^2},$$

$$m_{22} = s \left(1 - \frac{y}{hx+c} \right) - \frac{sy}{(hx+c)} + \frac{wy}{a_1+x} - \frac{2cy}{(y+a_3)} + \frac{cy^2}{(y+a_3)^2}.$$

Sehingga persamaan karakteristik yang berasosiasi dengan matriks Jacobian $M(E_3)$ adalah,

$$f(\lambda) = P_0 \lambda^2 + P_1 \lambda + P_2, \quad (6)$$

dari persamaan karakteristik tersebut kestabilan di ujikan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Sehingga titik equilibrium $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$ adalah asimtotik lokal dan kondisi kestabilan yang memenuhi bentuk $P_0 > 0, P_1 > 0, P_2 > 0$ dan $N_1 P_0 > P_2$.

3.2 Simulasi Numerik

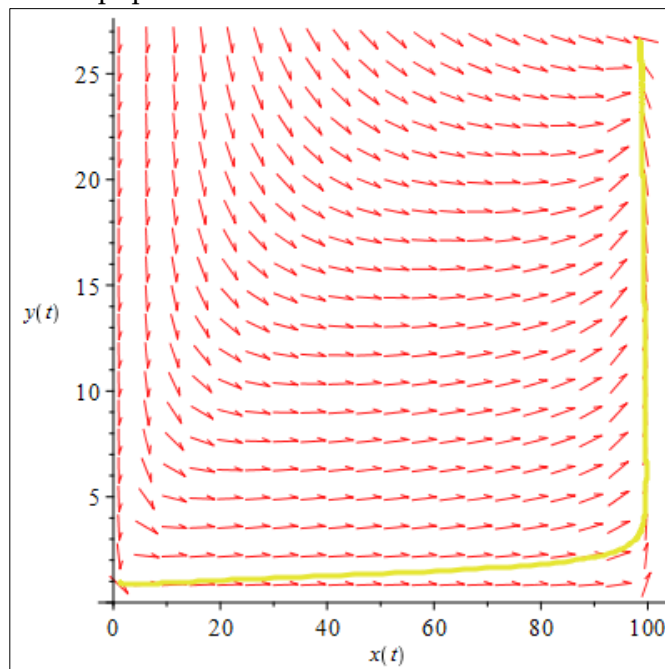
Pada bagian ini simulasi numerik diberikan untuk memperlihatkan secara numerik pertumbuhan populasi yang telah asimtotik pada equilibrium $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$. Simulasi numerik dilakukan pada model (3) dengan parameter dari asumsi penelitian yang realistis dan penelitian yang relevan. Pertumbuhan populasi spesies pada model yang seimbang dan kestabilan pada jangka waktu yang panjang. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik model (3) mengacu pada nilai parameter di bagian Tabel 1. Simulasi numerik memperlihatkan empat equilibrium dari simulasi Model (3), meliputi $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (0, y_1^*)$ dengan nilai $y_1^* = 0.00999983147$, $E_2 = (x_2^*, 0)$ dengan nilai $x_2^* = 100$, dan $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$ dengan nilai $x_3^* = 98.6530784$ dan $y_3^* = 27.4247262$

Selanjutnya titik equilibrium $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$ akan di uji menggunakan matriks Jacobian. Persamaan karakteristik yang muncul dari matriks Jacobian adalah,

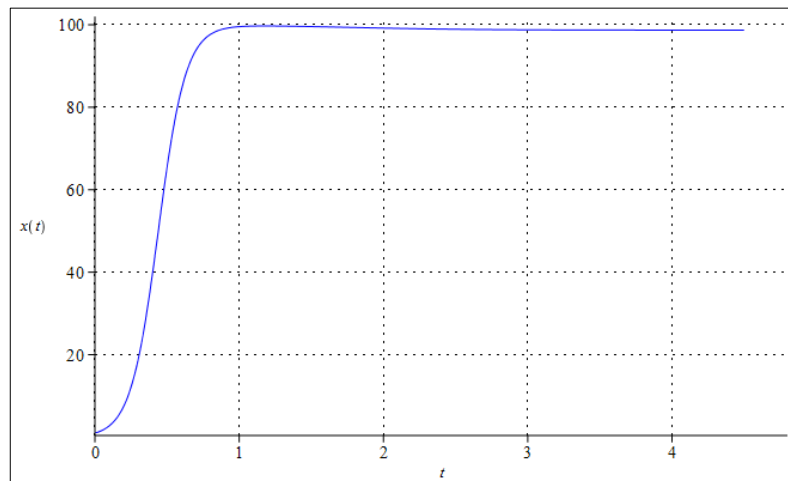
$$\lambda^2 + 12.6283744\lambda + 24.8975755 = 0, \quad (7)$$

dari persamaan tersebut akan di uji pada kriteria Routh-Hurwitz, untuk memperoleh nilai eigen. Masing-masing nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 = -10.183474857678$ dan $\lambda_2 = -2.4448995423219$. Nilai eigen memperlihatkan nilai negatif yang memenuhi syarat kestabilan asimtotik lokal. Secara ekologis menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi prey dan predator stabil dan tidak punah dalam jangka waktu yang panjang.

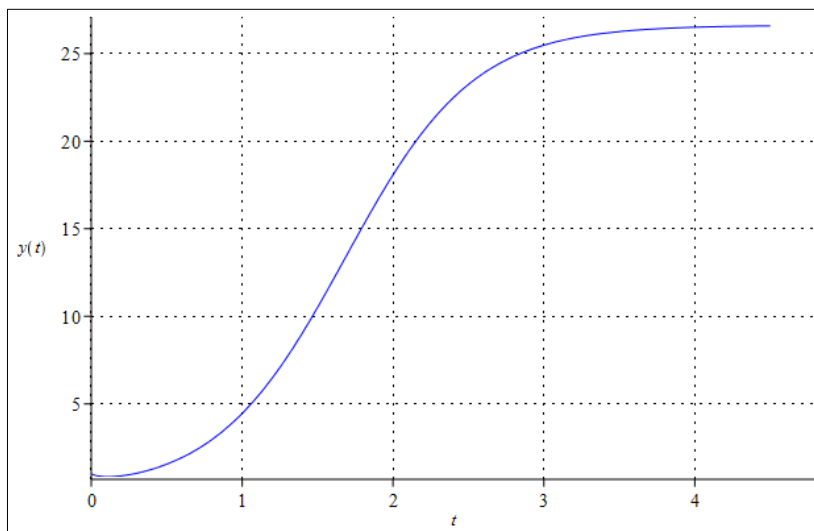
Penjelasan secara ekologis memang akan lebih menarik, apalagi sampai pada pengambilan kebijakan untuk program pelestarian dan atau lain sebagainya. Pengambilan nilai awal untuk kurva pertumbuhan populasi prey dan predator adalah $x(0)=1$ dan $y(0)=1$. Pengambilan nilai awal selalu pada himpunan solusi persamaan model (3). Berikut ini adalah simulasi kurva untuk menggambarkan secara visual pergerakan pertumbuhan populasi.



Gambar 1. Kurva Arah Pertumbuhan Populasi Prey Terhadap Predator



Gambar 2. Kurva Pertumbuhan Populasi Prey



Gambar 3. Kurva Pertumbuhan Populasi Predator

Gambar 1 memperlihatkan interaksi yang terjadi pada kedua spesies berlangsung. Eksistensi predator tetap besar dan mendominasi prey, walaupun interaksi kanibalisme dimiliki oleh spesies predator. Sementara kondisi pada spesies prey terlihat lebih tertekan pada jumlah populasinya, hal ini dikarenakan pergerakan populasi predator sangat rapi dan masif. Ketika pergerakan kurva di asumsikan secara luas, jelas bahwa dominasi dari spesies predator sangat besar dan konsisten. Perbandingan jumlah populasi juga terlihat tidak seimbang, kemungkinan terbesar spesies predator akan berganti makanan atau mencari makanan baru jika makanan utama dalam hal ini spesies prey sudah habis.

Gambar 2 dan Gambar 3 ini adalah tentang pertumbuhan populasi predator dan prey dalam angka waktu yang lama. Eksistensi kedua populasi memberikan gambaran bahwa pertumbuhan kedua populasi terus eksis menuju pertumbuhan yang stabil. Sementara pada perbandingan pertumbuhan kedua populasi terlihat sangat tidak sebanding. Pertumbuhan populasi predator sangat cepat dan besar pada periode awal pertumbuhan dan langsung mencapai pertumbuhan yang stabil dalam jangka waktu

yang lama. Sementara pada populasi prey, pertumbuhan sangat lambat dan perlahan pada periode awal hingga periode ketiga pertumbuhan populasi, dan terus bertumbuh hingga menemui titik keseimbangan populasi bertumbuh. Kasus seperti ini memperlihatkan bahwa populasi predator sangat mempengaruhi pertumbuhan prey. Secara umum ternyata pertumbuhan populasi predator sangat cepat dan tidak terlalu dipengaruhi oleh interaksi kanibalisme. Kemungkinan seperti ini sangat terjadi pada spesies tertentu yang memiliki daya pemangsaan yang tinggi. Pemangsaan yang aktif mencari, aktif mengintai, dan buas terhadap prey yang hendak dimakan

4. Kesimpulan

Penelitian ini memberikan hasil untuk Model (3) berupa 4 titik equilibrium non-negatif. Dari beberapa titik equilibrium tersebut hanya dianalisis satu titik yaitu yang non-negatif secara matematis dan paling relevan secara ekologis. Model yang disusun sangat mempertimbangkan kelangsungan makhluk hidup baik predator maupun prey. Titik equilibrium yang dipilih menjadi acuan untuk pengujian pada kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigen yang dimunculkan. Sementara pada hasil simulasi numerik yang diberikan, memperlihatkan kondisi titik equilibrium yang stabil asimtotik lokal. Sebagai solusi pada variabel yang mewakili pertumbuhan populasi prey, nilai pertumbuhan stabil dalam jangka waktu yang lama. Kondisi tersebut juga berlaku pada populasi predator yang menjadi rival pemangsaan. Sekaligus menjadi hasil akhir dari penelitian bahwa populasi predator dan prey secara umum akan terus berinteraksi dalam jangka waktu yang panjang. Tidak menutup kemungkinan juga populasi dari predator akan berpindah mangsa atau sumber makanan utama. Dari analisis kurva juga dimungkinkan untuk populasi dapat berpindah sumber makanan. Sementara pada intervensi interaksi kanibalisme tidak begitu memberikan pengaruh berarti. Hal ini dapat terjadi karena, kepadatan populasi yang cenderung stabil dan tidak adanya persaingan makanan yang signifikan. Temuan yang dapat dijumpai dalam ekosistem makhluk hidup, predator juga memiliki sifat saling membantu dalam mencari mangsa dan saling berbagi makanan dalam perolehan makanan.

Daftar Pustaka

- [1] M. Soleh and P. R. Mandasari, "Model Matematika Pengaruh Program Rehabilitasi dan Penerapan Hukuman terhadap Jumlah Pemakai Narkoba," *J. Sains Mat. dan Stat*, vol. 4, no. 2, pp. 9–17, 2018.
- [2] R. A. Pratama, M. Fransina, V. Ruslau, and U. Musamus, "Application of Beddington DeAngelis Response Function in Ecological Mathematical System : Study Fish Endemic Oliv Predator Species in Merauke," *JTAM (Jurnal Teor. dan Apl. Mat.*, vol. 6, no. 1, pp. 51–60, 2022.
- [3] Y. D. Jeong, S. Kim, I. H. Jung, and G. Cho, "Optimal Harvesting Strategy for Hairtail, *Trichiurus Lepturus*, in Korea Sea using Discrete-time Age-structured Model," *Appl. Math. Comput.*, vol. 392, p. 125743, 2021, doi: 10.1016/j.amc.2020.125743.
- [4] Y. Jia, Y. Li, and J. Wu, "Effect of Predator Cannibalism and Prey Growth on The Dynamic Behavior for a Predator-stage Structured Population Model with

- Diffusion," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 449, no. 2, pp. 1479–1501, 2017, doi: 10.1016/j.jmaa.2016.12.036.
- [5] J. F. Zhang, "Spatial Patterns of a Fractional Type Cross-diffusion Holling–Tanner Model," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 76, no. 4, pp. 957–965, 2018, doi: 10.1016/j.camwa.2018.05.033.
- [6] L. Zhang and S. Fu, "Global Bifurcation for a Holling–Tanner Predator–prey Model with Prey-taxis," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 47, pp. 460–472, 2019, doi: 10.1016/j.nonrwa.2018.12.002.
- [7] C. Arancibia-Ibarra, M. Bode, J. Flores, G. Pettet, and P. van Heijster, "Turing Patterns in a Diffusive Holling–Tanner Predator-prey Model with an Alternative Food Source for The Predator," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 99, p. 105802, 2021, doi: 10.1016/j.cnsns.2021.105802.
- [8] S. Ai, Y. Du, and R. Peng, "Traveling Waves for a Generalized Holling–Tanner Predator–prey Model," *J. Differ. Equ.*, vol. 263, no. 11, pp. 7782–7814, 2017, doi: 10.1016/j.jde.2017.08.021.
- [9] C. Arancibia-Ibarra and J. Flores, "Dynamics of a Leslie–Gower Predator–prey Model with Holling Type II Functional Response, Allee Effect and a Generalist Predator," *Math. Comput. Simul.*, vol. 188, pp. 1–22, 2021, doi: 10.1016/j.matcom.2021.03.035.
- [10] M. Cappelletti Montano and B. Lisena, "Diffusive Holling–Tanner Predator–prey Models in Periodic Environments," *Appl. Math. Lett.*, vol. 87, pp. 42–49, 2019, doi: 10.1016/j.aml.2018.07.024.
- [11] S. Li, C. Wang, and K. Wu, "Relaxation Oscillations of a Slow–fast Predator–prey Model with a Piecewise Smooth Functional Response," *Appl. Math. Lett.*, vol. 113, p. 106852, 2021, doi: 10.1016/j.aml.2020.106852.
- [12] K. P. Wijaya *et al.*, "Food Sharing and Time Budgeting in Predator-prey Interaction," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 97, p. 105757, 2021, doi: 10.1016/j.cnsns.2021.105757.
- [13] H. Cheng and R. Yuan, "Traveling Waves of Some Holling–Tanner Predator–prey System with Nonlocal Diffusion," *Appl. Math. Comput.*, vol. 338, pp. 12–24, 2018, doi: 10.1016/j.amc.2018.04.049.
- [14] J. Fu, D. Jiang, N. Shi, T. Hayat, and A. Alsaedi, "Qualitative Analysis of a Stochastic Ratio-dependent Holling-Tanner System," *Acta Math. Sci.*, vol. 38, no. 2, pp. 429–440, 2018, doi: 10.1016/S0252-9602(18)30758-6.
- [15] B. Roy, S. K. Roy, and D. B. Gurung, "Holling–Tanner model with Beddington–DeAngelis Functional Response and Time Delay Introducing Harvesting," *Math. Comput. Simul.*, vol. 142, pp. 1–14, 2017, doi: 10.1016/j.matcom.2017.03.010.
- [16] V. S. Ananth and D. K. K. Vamsi, "Influence of Quantity of Additional Food in Achieving Biological Conservation and Pest Management in Minimum-time for Prey-predator Systems Involving Holling type III response," *Heliyon*, vol. 7, no. 8, p. e07699, 2021, doi: 10.1016/j.heliyon.2021.e07699.
- [17] J. Li, X. Zhu, X. Lin, and J. Li, "Impact of Cannibalism on Dynamics of a Structured Predator–prey System," *Appl. Math. Model.*, vol. 78, pp. 1–19, 2020, doi: 10.1016/j.apm.2019.09.022.
- [18] F. Zhang, Y. Chen, and J. Li, "Dynamical Analysis of a Stage-structured Predator-

- prey Model with Cannibalism," *Math. Biosci.*, vol. 307, no. August 2018, pp. 33–41, 2019, doi: 10.1016/j.mbs.2018.11.004.
- [19] P. Mishra, S. N. Raw, and B. Tiwari, "On a Cannibalistic Predator–prey Model with Prey Defense and Diffusio," *Appl. Math. Model.*, vol. 90, pp. 165–190, 2021, doi: 10.1016/j.apm.2020.08.060.
- [20] K. Takatsu, "Predator Cannibalism can Shift Prey Community Composition Toward Dominance by Small Prey Species," *Ecol. Evol.*, vol. 12, no. 5, pp. 1–11, 2022, doi: 10.1002/ece3.8894.
- [21] M. Rayungsari, A. Suryanto, W. M. Kusumawinahyu, and I. Darti, "Dynamical Analysis of a Predator-Prey Model Incorporating Predator Cannibalism and Refuge," *Axioms*, vol. 11, no. 3, 2022, doi: 10.3390/axioms11030116.