Jurnal Sains Matematika dan Statistika
Vol. 8, No. 2, Juli 2022 Hal. 70-76

ISSN : 2460-4542 (print)
ISSN : 2615-8663 (online)
DOI : http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v8i2.17156

Keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Grand Grand Morrey*

Dian Maharani

Prodi Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Gajayana No. 50, Dinoyo, Malang, 65144
Email: dian.maharani@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Operator *Mikhlin* adalah salah satu operator pengali. Operator ini memetakan suatu fungsi ke hasil invers transformasi *Fourier* dari perkalian transformasi *Fourier* fungsi tersebut dikali dengan suatu fungsi lain yang telah ditentukan sebelumnya. Dengan mengunakan dekomposisi *diadik*, telah dibuktikan bahwa Operator *Mikhlin* ini terbatas di Ruang *Morrey*. Lalu dengan menggunakan definisi, didapatkan bahwa Operator *Mikhlin* juga terbatas di Ruang *Grand Grand Morrey*.

Kata Kunci: Keterbatasan operator, Operator *Mikhlin*, Ruang *Morrey*, Ruang *Grand Grand Morrey*

Abstract

Mikhlin operator is one of the multiplier operators. This operator maps a function into the inverse *Fourier* transform of the *Fourier* multiplier transformation of that function times another fixed function. Using dyadic decomposition, it is already proven that the Mikhlin operator is bounded in Morrey space. Using the definition, we can prove that the Mikhlin operator is also bounded on Grand Grand Morrey space.

Keywords: Boundedness of Operator, Mikhlin Operator, Morrey Space, Grand Grand Morrey Space

Diterima : 08-06-2022 , Disetujui : 17-06-2022, Terbit Online : 22-07-2022

1. Pendahuluan

Operator perkalian berawal dari adanya masalah sehari-hari yang bisa dimodelkan dalam bentuk matematika, salah satunya menggunakan persamaan differensial. Maharani [1] telah membahas salah satu masalah terkait operator perkalian, yaitu mengenai persamaan panas pada kawat dengan panjang tak hingga. Dari permasalahan ini, dengan menggunakan transformasi *Fourier*, didapatkan operator pengali *Fourier* atau operator Riesz, yaitu

$$R_j(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[m_j\hat{f}\right](x),$$

di mana $m_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}, j = 1, \dots, n$ dan $f \in L^2$.

Pada tahun 1956, S. G. Mikhlin [2] memperumum operator pengali *Fourier* menjadi operator pengali *Mikhlin* dan menyatakan bahwa operator tersebut terbatas di Ruang *Lebesgue* $L^p, 1 < p < \infty$. Maharani [1] memperluas keterbatasannya dan mendapatkan bahwa Operator *Mikhlin* tersebut juga terbatas di Ruang *Morrey*. Dalam hal ini, Ruang *Morrey* yang dimaksud adalah Ruang *Morrey* klasik.

Pada tahun 2011, Meskhi [3] memperkenalkan Ruang *Grand Morrey* yang merupakan perluasan dari Ruang *Morrey* klasik. Pada tahun 2013, Rafeiro [4] membuat perluasannya lagi, yaitu Ruang *Grand Grand Morrey*. Pada penelitian ini, akan dibuktikan keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Grand Grand Morrey*.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian pengembangan (*Research and Development*/R&D). Tahap pertama dari penelitian ini adalah menentukan topik penelitian. Dari hasil studi literatur dan observasi, terdapat penelitian yang masih dapat dikembangkan, yaitu penelitian mengenai Operator *Mikhlin* dan Ruang *Grand Grand Morrey*. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai "Keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Morrey*". Setelah menentukan topik, langkah penelitian selanjutnya adalah mengumpulkan artikel-artikel rujukan terkait topik yang diambil. Dari artikel-artikel tersebut, dikumpulkanlah definisi, teorema, dan lema yang dapat digunakan untuk membuat pembahasan. Langkah berikutnya, sekaligus menjadi langkah paling penting adalah membuat pembahasan.

3. Hasil dan Pembahasan

Operator *Mikhlin* pada awalnya dibuat oleh S. G. Mikhlin [2] untuk memperumum operator pengali *Fourier*. Operator pengali *Fourier* itu sendiri, seperti yang diungkapkan Chen [5] berikut.

Definisi 1 Operator Pengali
Operator pengali Tf didefinisikan sebagai

$$\widehat{Tf} = m(\xi)f(\xi),$$

di mana $\widehat{Tf}$ adalah transformasi Fourier dari Tf.

Transformasi *Fourier* dan invers transformasi *Fourier* sendiri didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2 [6] **Transformasi *Fourier* dan Invers Transformasi *Fourier***
Untuk $f \in L^1$, transformasi Fourier dari f, dinotasikan sebagai $\hat{f}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

Sedangkan invers transformasi Fourier didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} = \int e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

Dengan menggunakan transformasi *Fourier* tersebut, Abels [7] mendeskripsikan Operator *Mikhlin* sebagai berikut.

Definisi 3 Operator *Mikhlin*

Misal $N = n + 2, n \in \mathbb{N}$. Kemudian, misal $m: \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ adalah fungsi yang dapat diturunkan sebanyak N kali sehingga

$$\left|\partial_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-|\alpha|}$$

untuk semua $\xi \neq 0, |\alpha| \leq N$. Operator Mikhlin didefinisikan sebagai

$$M(f) = \mathcal{F}^{-1}\left[m\hat{f}\right]$$

untuk semua $f \in S$, di mana S adalah Ruang Schwartz.

Sebelum membahas Ruang *Grand Grand Morrey*, terlebih dahulu akan dibahas mengenai Ruang *Morrey*, Ruang *Grand Morrey*, dan Ruang *Grand Grand Morrey* sebagai berikut.

Definisi 4 [7] **Ruang *Morrey* (Klasik)**

Misal $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda < 1$, Ruang Morrey biasa (klasik) $L^{p,\lambda}(\Omega)$ adalah himpunan semua fungsi bernilai riil yang terukur sedemikian sehingga

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r\leq d}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|^\lambda}\int_{\tilde{B}(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dengan $d := diam\,\Omega$.

Definisi 5 [7] **Ruang *Grand Morrey***

Misal $1 \leq p < \infty,\ \theta > 0$, dan $0 \leq \lambda < 1$. Ruang Grand Morrey, dinotasikan $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$, adalah kelas fungsi $f: \Omega \to \mathbb{R}$ dengan norm

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} := \sup_{0<\epsilon<p-1} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<d}} \left[\frac{\epsilon^\theta}{|B(x,r)|^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\epsilon} dy\right]^{\frac{1}{p-\epsilon}} < \infty.$$

Jika $\lambda = 0$, maka $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ adalah Ruang *Grand Lebesgue* pada Ω dan dinotasikan $L^{p),\theta}(\Omega)$. Lebih jauh lagi, jika $\theta = 1$, maka notasi yang digunakan adalah $L^{p),\lambda}(\Omega)$, bukan $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$.

Definisi 6 [4] **Ruang *Grand Grand Morrey***

Misal $1 < p < \infty,\ \theta > 0, \alpha \geq 0$, dan $0 \leq \lambda < 1$. Definisikan fungsi

$$\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s) := \sup_{0<\epsilon\leq s} \epsilon^{\frac{\theta}{p-\epsilon}} \|f\|_{L^{p-\epsilon,\lambda-\alpha\epsilon}(\Omega)},$$

dengan $0 < s \leq \min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}$. $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)$ adalah ruang yang berisi semua fungsi bernilai riil yang terukur dan memiliki norm berhingga

$$\|f\|_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)} := \Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f, s_{\max}),\ \ s_{\max} = \min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}.$$

Dari definisi di atas, norm f pada Ruang *Grand Grand Morrey* dapat ditulis ulang sebagai

$$\|f\|_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)} := \sup_{0<\epsilon\leq s_{\max}} \epsilon^{\frac{\theta}{p-\epsilon}} \|f\|_{L^{p-\epsilon,\lambda-\alpha\epsilon}(\Omega)}, \qquad s_{\max} = \min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}.$$

Jika $\alpha = 0, \lambda > 0$, maka Ruang *Grand Grand Morrey* adalah Ruang *Grand Morrey*, dan saat $\lambda = \alpha = 0$, maka Ruang *Grand Grand Morrey* menjadi Ruang *Grand Lebesgue*. Pada penelitian ini, lapangan yang digunakan adalah $\mathbb{R}^n$, sehingga pada definisi Ruang *Morrey*, Ruang *Grand Morrey*, maupun Ruang *Grand Grand Morrey* di atas, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Untuk mempersingkat penulisan, maka $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^{p,\lambda}$, $L^{p),\theta,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^{p),\theta,\lambda}$, dan $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\mathbb{R}^n) = L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}$.

Menggunakan keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Lebesgue*, Maharani [1] telah membuktikan bahwa Operator *Mikhlin* ini terbatas pada Ruang *Morrey*. Namun sebelum membahas mengenai keterbatasan tersebut, akan dibahas mengenai partisi (dekomposisi) *Littlewood – Paley* / partisi *diadik* satuan [8]. Partisi ini bertujuan untuk membuat barisan $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dengan $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, yaitu φ_j adalah fungsi kontinu yang dapat diturunkan terus menerus dan memiliki support kompak, dan $\sum_j \varphi_j = 1$. φ_j harus memenuhi

$$supp\ \varphi_j(\xi) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : c2^j \le |\xi| < C2^j\}$$

untuk c, C saling berkaitan. Berikut adalah langkah-langkah membuat partisi *diadik*.

1. Pilih fungsi non negatif $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi
$$\psi_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < |\xi| < 2.$$
2. Definisikan $\psi_j(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)$ dan
$$\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi) > 0$$
untuk $\xi \neq 0$, di mana $\phi(\xi)$ memuat maksimal 2 suku tak nol. Dekomposisi yang diinginkan adalah
$$\varphi_j(\xi) = \phi(\xi)^{-1}\psi_j(\xi).$$
3. Pada kasus ini, $\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi)$ karena $\phi(2^{-j}\xi) = \phi(\xi)$. Akibatnya
$$\left|\partial_\xi^\alpha \varphi_j(\xi)\right| \le C\left\|\partial_\xi^\alpha \varphi_0\right\|_{L^\infty}(2^{-j|\alpha|})$$
dengan $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Proposisi 1 Bentuk Konvolusi Operator *Mikhlin*

Misal M adalah Operator Mikhlin. Terdapat fungsi $k: \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ yang terintegralkan lokal, dapat diturunkan secara kontinu, memiliki support kompak, serta memenuhi:

$$|k(z)| \le C|z|^{-n}, |\nabla k(z)| \le C|z|^{-n-1},$$

untuk semua $z \neq 0$ sedemikian sehingga

$$M(f)(x) = \int k(x-y)f(y)dy$$

untuk semua $x \notin supp\ f, f \in L^2$.

Bukti. Dekomposisi fungsi m menggunakan dekomposisi *diadik* menjadi

$$m(\xi) = \sum_j m_j(\xi)\,, \xi \neq 0$$

dengan $m_j(\xi) = \varphi_j(\xi)m(\xi)$.

$$\left|\partial_\xi^\alpha m_j(\xi)\right| \le \sum_{0\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial_\xi^\beta m(\xi)\right| \left|\partial_\xi^{\beta-\alpha}\varphi_j(\xi)\right| \le C2^{-j|\alpha|}.$$

Untuk setiap $m_j(\xi)$, didapatkan

$$M_j(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[m_j\hat{f}\right](x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x-y)f(y)dy,$$

dengan $k_j(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[m_j\right](x)$ adalah fungsi kontinu. Didapatkan,

$$M(f)(x)=\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x-y)f(y)dy.$$

Kemudian, pecah $\sum_j \partial_z^\alpha k_j(z)$ menjadi $\sum_{2^j\leq|z|^{-1}} \partial_z^\alpha k_j(z)$ dan $\sum_{|z|^{-1}<2^j} \partial_z^\alpha k_j(z)$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{j\leq\ {}^2\log|z|^{-1}} \partial_z^\alpha k_j(z) \leq C'|z|^{-n-|\alpha|}$$

untuk $|\alpha|\leq 1$ dan $M=0$. Sedangkan untuk $|\alpha|\leq 1$ dan $M=n+|\alpha|+1$,

$$\sum_{j>\ {}^2\log|z|^{-1}} \partial_z^\alpha k_j(z) \leq C'|z|^{-n-|\alpha|}.$$

Jadi $\sum_j \partial_z^\alpha k_j(z)$ konvergen mutlak dan seragam ke $\partial_z^\alpha k(z)$ pada setiap himpunan bagian $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ yang kompak, sehingga

$$|k(z)|\leq C|z|^{-n}, |\nabla k(z)|\leq C|z|^{-n-1}$$

untuk semua $|\alpha|\leq 1$. Karena $\sum_j \varphi_j(\xi)$ berhingga lokal dan $|m_j(\xi)|$ terbatas seragam terhadap ξ dan $\hat{f}(\xi)\in L^2$, maka

$$M(f)(x)=\int k(x-y)f(y)dy.$$

Teorema 1 Keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Morrey*

Misal M adalah Operator Mikhlin, maka M dapat diperluas menjadi operator terbatas pada ruang Morrey, yaitu

$$M: L^{p,\lambda}\to L^{p,\lambda}, 1<p<\infty, 0\leq\lambda<n.$$

Bukti. Misal $w\in\mathbb{R}^n, r>0$, dan $f\in L^{p,\lambda}$. Tulis $f=f_1+f_2$ dengan $f_1=f\cdot\chi_{B(z,2r)}$. Karena $f\in L^{p,\lambda}$, maka $f_1\in L^{p,\lambda}$. Sementara f_2 adalah fungsi pada ruang *tempered distribution* [9]. Dengan menggunakan keterbatasan Operator *Mikhlin* pada Ruang *Lebesgue*, didapatkan

$$\|M(f_1)\|_{L^p(B(z,r))}\leq C_1 r^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^{p,\lambda}}. \quad (1)$$

Misal $x\in B(z,r)$. Dengan menggunakan konvolusi,

$$|M(f_2)(x)|\leq C_2\int_{B^c(z,2r)}|f(y)|\int_{|x-y|}^{\infty} t^{-n-1}dt\,dy,$$

dengan menggunakan Teorema *Fubini* dan ketaksamaan *Hölder*, didapatkan

$$|M(f_2)(x)|\leq C_2\|f\|_{L^{p,\lambda}} r^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Akibatnya,

$$\|M(f_2)\|_{L^p(B(z,r))}\leq C_2\|f\|_{L^{p,\lambda}} r^{\frac{\lambda}{p}}. \quad (2)$$

Dari (1) dan (2),

$$\begin{aligned}\|M(f)\|_{L^p(B(z,r))} &= \|M(f_1)\|_{L^p(B(z,r))}+\|M(f_2)\|_{L^p(B(z,r))}\\ &\leq C_1 r^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^{p,\lambda}}+C_2\|f\|_{L^{p,\lambda}} r^{\frac{\lambda}{p}}\\ &\leq C r^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^{p,\lambda}}.\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sembarang $r>0$, maka

$$\|M(f)\|_{L^{p,\lambda}}=\sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}}\|M(f)\|_{L^p(B(z,r))}\leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}.$$

Dengan menggunakan Teorema 1, Operator *Mikhlin* yang telah dibahas pada definisi 3 dapat diperluas menjadi operator terbatas di ruang *Grand Grand Morrey* seperti yang tertuang pada Teorema 2 berikut.

Teorema 2 Keterbatasan Operator *Mikhlin* di Ruang *Grand Grand Morrey*

Misal $1 < p < \infty,\ \theta > 0, \alpha \geq 0, 0 \leq \lambda < 1,$ *dan* M *adalah Operator Mikhlin, maka* M *dapat diperluas menjadi operator terbatas pada ruang Grand Grand Morrey, yaitu*

$$M: L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)} \to L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}.$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi Ruang *Grand Grand Morrey* dan Teorema 1,

$$\begin{aligned}\|M(f)\|_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}} &= \sup_{0<\epsilon\leq s_{\max}} \epsilon^{\frac{\theta}{p-\epsilon}} \|M(f)\|_{L^{p-\epsilon,\lambda-\alpha\epsilon}} \\ &\leq \sup_{0<\epsilon\leq s_{\max}} \epsilon^{\frac{\theta}{p-\epsilon}} C\|f\|_{L^{p-\epsilon,\lambda-\alpha\epsilon}} \\ &= C \sup_{0<\epsilon\leq s_{\max}} \epsilon^{\frac{\theta}{p-\epsilon}} \|f\|_{L^{p-\epsilon,\lambda-\alpha\epsilon}} \\ &= C\|f\|_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa Operator *Mikhlin* terbatas pada Ruang *Grand Grand Morrey*.

4. Kesimpulan

Berdasarakan pemaparan di atas, dapat disimpulkan bahwa Ruang *Grand Grand Morrey* adalah perluasan dari Ruang *Morrey*. Selain itu, Operator *Mikhlin* dapat diperluas menjadi operator linear yang terbatas di Ruang *Grand Grand Morrey*. Pada penelitian selanjutnya, dapat ditelaah apakah Operator *Mikhlin* juga merupakan operator linear yang terbatas di ruang-ruang lainnya, misal pada Ruang *Herz*, $K_{p,q}^{\infty}(\Omega)$.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih penulis ucapkan kepada Allah SWT yang telah memberi beragam kenikmatan sehingga artikel ini terwujud. Selain itu juga kepada Prof. Marcus Wono Setya Budhi, Ph.D.dan Dr. Jalina Widjaja, S.Si., M.Si yang telah membimbing penulis dalam memahami Operator *Mikhlin* dan Ruang *Morrey*.

Daftar Pustaka

[1] E. M. Stein dan R. Shakarchi, Fourier analysis: An introduction, 2011.

[2] M. K. Kalleji, "Boundedness of Mikhlin Operator in Variable Exponent Morrey Space," *Mathematical Analysis and Convex Optimization,* vol. 2, no. 1, pp. 79-85, 2021.

[3] H. Abels, Pseudodifferential and Singular Integral Operators, 2011.

[4] D. Maharani, J. Widjaja dan M. W. Budhi, "Boundedness of Mikhlin Operator in Morrey Space," *Journal of Physics: Conference Series,* vol. 1180, 2019.

[5] H. Rafeiro, "A Note on Boundedness of Operators in Grand Grand Morrey Spaces," *Operator*

Theory: Advances and Applications, vol. 229, pp. 349 - 356, 2013.

[6] V. Kokilashvili, A. Meskhi dan M. A. Ragusa, "Weighted extrapolation in grand Morrey spaces and applications to partial differential equations," *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni,* vol. 30, no. 1, 2019.

[7] S. G. Samko dan S. M. Umarkhadzhiev, "Grand morrey type spaces," *Vladikavkaz Mathematical Journal,* vol. 22, no. 4, pp. 104-118, 2020.

[8] A. Meskhi, "Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces," *Complex Variables and Elliptic Equations,* vol. 56, no. 10-11, pp. 1003-1019 , 2011.

[9] R. Haller, H. Heck dan A. Noll, "Mikhlin's theorem for operator-valued Fourier multipliers in n variables," *Mathematische Nachrichten,* vol. 244, no. 1, pp. 110-130, 2002.

[10] Y. S. Chen, L. K. Chen dan D. Fan, "Multiplier operators on weighted function spaces," *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* vol. 31, no. 1, pp. 77-93, 2001.

[11] A. Shaviv, "Tempered distributions and Schwartz functions on definable manifolds," *Journal of Functional Analysis,* vol. 278, no. 11, 2020.

[12] P. Zheng dan X. Shi, "The use of the dyadic partition in elementary real analysis," *Journal of Computational and Applied Mathematics,* vol. 329, pp. 344-352, 2018.