Jurnal Sains Matematika dan Statistika
Vol. 7, No. 1, Januari 2021 Hal. 1-9

ISSN : 2460-4542 (print)
ISSN : 2615-8663 (online)
DOI : http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v7i1.12434

Trace Matriks 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Rika Taslim[2]

[1]Prodi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
[2]Prodi Teknik Industri, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id[1]

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Tepatnya *trace* matriks 3x3 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Mendapatkan nilai *trace* matriks berpangkat tersebut, maka harus didapatkan terlebih dahulu bentuk umum perpangkatan dari matriks 3x3 berbentuk khusus ini. Bentuk umum perpangkatan matriks 3x3 yang berbentuk khusus diperoleh dengan memulai memangkatkan matriks dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$, selanjutnya dapat dugaan bentuk umumnya dan terakhir dibuktikan dengan induksi matematika. Dan nilai *trace* matriks 3x3 berpangkat bilangan bulat positif diperoleh dari bentuk umum perpangkatan matriksnya dengan menggunakan definisi *trace* matriks.

Kata Kunci: induksi matematika, perpangkatan matriks, *trace* matriks.

Abstract

This paper discusses the trace of an integer power of real 3×3 *of special matrices. The general form of the integer power of real 3 x 3 of its matrices is obtained by elevating those matrices from* $(A_3)^2$ *until* $(A_3)^{11}$ *and furthermore, we can expect its general form. Next, it is proved by mathematical induction. Whereas the trace of integer power of real* 3×3 *of particular matrices is obtained from the general form of the integer power of real* 3×3*special matrices.*

Keywords: *mathematical induction, matrix power, trace of power matrix*

1. Pendahuluan

Trace matriks adalah penjumlahan elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujursangkar. Sangat sederhana sekali definisi dari *trace* matriks, artinya sangat mudah untuk menentukan nilai *trace* dari suatu matriks. Tetapi jika *trace* yang diinginkan adalah *trace* matriks berpangkat, maka haruslah matriks tersebut dipangkatkan terlebih dahulu. Sehingga menentukan *trace* matriks berpangkat tidak semudah yang dibayangkan.

Apalagi pangkat yang diidnginkan cukup besar. Hal inilah yang menjadi latar belakang dari penelitian ini.

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat sudah banyak dilakukan. Penelitian [1] membahas mengenai *trace* pada matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan persamaan Euler. Matriks yang digunakan adalah matriks yang entri-entrinya bilangan bulat. Hasil yang diperoleh adalah:

$T(A^{p^r}) = Tr(A^{p^{r-1}})\ (mod\ p^r)$, p bilangan prima, $r \in Z$.

Penelitian [2] telah membahas mengenai analisis jaringan kompleks. Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut adalah penghitungan jumlah bilangan pada segitiga pada graf terhubung sederhana, yaitu $Tr(A^3)/6$. Matriks A yang digunakan adalah matriks ketetanggan pada suatu graf. Selanjutnya masih berhubungan dengan *trace* matriks berpangkat, menurut [3] *trace* matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Teori Matriks, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Perrsamaan Diferensial, dan Analisis Jaringan.

Mengingat proses yang cukup panjang untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat, maka diperlukan bentuk umum perpangkatan matriks yang diinginkan. Penelitian [4] sangat membantu menentukan nilai *trace* matriks berpangkat. Penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks 2x2 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\ \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dan hasil yang diperoleh pada artikel tersebut yaitu: mendapatkan dua bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat positif untuk genap dan ganjil.

Masih berhubungan dengan *trace* matriks berpangkat, penelitian [5] melanjutkan penelitian [4] membahas mengenai trace matriks 2x2 berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan sama dengan [9] dan hasil yang diperoleh adalah: mendapatkan dua bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif untuk genap dan ganjil.

Selanjutnya penelitian [6] juga membahas mengenai *trace* matriks 2x2 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Matriks bentuk khusus yang digunakan adalah: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b, \in \mathbb{R}$. Hasil yang diperoleh adalah: bentuk umum perpangkatan matriks A_{2x2} berpangkat bilangan bulat positif. Serta mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus tersebut berpangkat bilangan bulat positif. Dengan matriks yang sama pada [6], penelitian [7] melanjutkan dengan perpangkatan bilangan bulat negatif. Hasil yang diperoleh adalah: bentuk umum perpangkatan matriks A_{2x2} berpangkat bilangan bulat negatif. Serta mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus tersebut berpangkat bilangan bulat negatif.

Penelitian pada artikel ini membahas mengenai *trace* dari matriks 3 x 3 berpangkat bilangan bulat, dengan bentuk matriks khusus yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Diharapkan dengan adanya bentuk umum *trace* matriks 3x3 berpangkat bilangan bulat tersebut dapat memudahkan berbagai pihak baik di dalam bidang matematika maupun di luar bidang matematika yang membutuhkan penelitian ini.

2. Metode Penelitian

2.1 LandasanTeori

Artikel ini menggunakan metode studi literatur atau tinjauan pustaka yang merujuk kepada artikel-artikel sebelumnya yang telah dijelaskan pada pendahuluan. Pada metode ini diberikan landasan teori dan langkah-langkah untuk mendapatkan hasil dari penelitian ini. Beberapa landasan teori yang diperlukan dalam artikel ini akan diberikan sebagai berikut.

A. Perpangkatan Matriks

Definisi 1 [8] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan perpangkatan bilangan bulat tak negatif yaitu:

$$A^0 = 1, \qquad A^n = \underbrace{A.A.A\ldots A}_{n\ faktor},\quad (n > 0)$$

dan jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif yaitu:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 1.

Teorema 1 [8] Jika A adalah matriks kuadrat dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

1. $A^r.A^s = A^{r+s}$
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks 3 x 3 yang berpangkat bilangan bulat negatif, diperlukan daterminan matriks tersebut. Metode yang digunakan penulis adalah metode minor dan kofaktor untuk menentukan nilai determinan matriksnya.

Definisi 2 [9] Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan Definisi 2 di atas, maka diperlukan rumus umum determinan suatu matriks. Berikut diberikan dalam Teorema 2.

Teorema 2 [9] Determinan dari matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

(*ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j*)

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

(*ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i*)

B. *Trace* Matriks

Definisi 3 [10] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks bujur sangkar, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sifat-sifat *trace* matriks dapat dilihat pada Teorema 3 berikut.

Teorema 3 [1] Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

1. $tr(A) = tr(A^t)$
2. $tr(cA) = c.tr(A^t)$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

Pembuktian pernyataan matematika yang diperoleh pada penelitian ini menggunakan metode induksi matematika. Definisi dari induksi matematika diberikan pada Definisi 4 berikut.

Definisi 4 [11] Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut:

Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

2.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah penelitian untuk mendapatkan *trace* matriks 3 x 3 berpangkat bilangan bulat diberikan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks ukuran 3 x 3 pada Persamaan (1)
2. Menentukan perpangkatan matriks dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^8$.
3. Menduga bentuk umum $(A_3)^n$.
4. Membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan bentuk umum *trace*$(A_3)^n$ menggunakan bentuk umum$(A_{3x3})^n$
6. Membuktikan bentuk umum *trace*$(A_3)^n$ menggunakan pembuktian langsung.
7. Menentukan det(A_3) , jika det(A_3) = 0, maka invers (A_3) tidak ada dan tidak dapat ditentukan perpangkatan matriks untuk bilangan bulat negatif.
8. Jika det$(A_3) \neq 0$, maka dapat ditentukan perpangkatan matriks $(A_3)^{-n}$ dan *trace* $(A_3)^{-n}$
9. Mengaplikasikan bentuk umum perpangkatan matriks $(A_3)^n$ pada contoh.
10. Mengaplikasikan bentuk umum *trace*$(A_3)^n$ pada contoh.

3. Hasil dan Pembahasan

Ada tiga bentuk yang diperoleh pada penelitian ini. Bentuk umum pertama yang diperoleh adalah bentuk umum perpangkatan matriks khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Bentuk umum kedua, bentuk umum *trace* matriks khusus ordo

3×3 berpangkat bilangan bulat. Dan terakhir, aplikasi *trace* matriks khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

3.1 Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Khusus 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Bentuk umum perpangkatan matriks berbentuk khusus pada Persamaan (1) diperoleh dengan memangkatkan matriks khusus tersebut dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$. Selanjutnya diduga bentuk umumnya dan terakhir dibuktikan menggunakan induksi matematika. Berikut diberikan pemaparan dari langkah-langkah tersebut.

$$
\begin{aligned}
(A_3)^2 &= A_3 A_3 \\
&= \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+ab+ac & a^2+ab+ac & a^2+ab+ac \\ ab+b^2+bc & ab+b^2+bc & ab+b^2+bc \\ ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(a+b+c) & a(a+b+c) & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & b(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & c(a+b+c) & c(a+b+c) \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)A_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^3 &= (A_3)^2 A_3 \\
&= (a+b+c)A_3 A_3 \\
&= (a+b+c)(A_3)^2 \\
&= (a+b+c)(a+b+c)A_3 \\
&= (a+b+c)^2 A_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^4 &= (A_3)^3 A_3 \\
&= (a+b+c)^2 A_3 A_3 \\
&= (a+b+c)^2 (A_3)^2 \\
&= (a+b+c)^2 (a+b+c)A_3 \\
&= (a+b+c)^3 A_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^5 &= (A_3)^4 A_3 \\
&= (a+b+c)^3 A_3 A_3 \\
&= (a+b+c)^3 (A_3)^2 \\
&= (a+b+c)^3 (a+b+c)A_3 \\
&= (a+b+c)^4 A_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^6 &= (A_3)^5 A_3 \\
&= (a+b+c)^4 A_3 A_3 \\
&= (a+b+c)^4 (A_3)^2 \\
&= (a+b+c)^4 (a+b+c)A_3 \\
&= (a+b+c)^5 A_3
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh $(A_3)^7$ sampai $(A_3)^{11}$ yaitu:

$$
\begin{aligned}
(A_3)^7 &= (a+b+c)^6 A_3 \\
(A_3)^8 &= (a+b+c)^7 A_3 \\
(A_3)^9 &= (a+b+c)^8 A_3 \\
(A_3)^{10} &= (a+b+c)^9 A_3 \\
(A_3)^{11} &= (a+b+c)^{10} A_3
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh, maka dapat diduga bahwa $(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1} A_3$. Dugaan tersebut akan dibuktikan menggunakan induksi matematika yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4 Jika diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$

maka $\left(A_3 \right)^n = \left(a + b + c \right)^{n-1} A_3$. dengan $n \in Z^+$

Bukti: Misalkan $p\left(n \right): \left(A_3 \right)^n = \left(a + b + c \right)^{n-1} A_3$, $\forall\, a, b, c \in R$.

i. *Basis Induksi* : Untuk $n = 1$ maka

$$\begin{aligned} p\left(1 \right): \left(A_3 \right)^1 &= \left(a + b + c \right)^{1-1} A_3 \\ &= \left(a + b + c \right)^0 A_3 \\ &= A_3 \end{aligned}$$

dengan memperhatikan Persamaan (1), maka $p\left(1 \right)$ benar.

ii. *Langkah induksi* : Untuk $n = k$ diasumsikan $p\left(k \right)$ benar, yaitu:

$$p\left(k \right) : \left(A_3 \right)^k = \left(a + b + c \right)^{k-1} A_3$$

maka akan dibuktikan untuk $n = k + 1$ maka $p\left(k + 1 \right)$ juga benar, yaitu:

$$p\left(k + 1 \right) : \left(A_3 \right)^{k+1} = \left(a + b + c \right)^k A_3 . \qquad (2)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left(A_3 \right)^{k+1} &= \left(A_3 \right)^k \left(A_3 \right) \\ &= \left(a + b + c \right)^{k-1} A_3\, A_3 \\ &= \left(a + b + c \right)^{k-1} \left(A_3 \right)^2 \\ &= \left(a + b + c \right)^{k-1} \left(a + b + c \right) A_3 \\ &= \left(a + b + c \right)^{\left(k-1 \right)+1} A_3 \\ &= \left(a + b + c \right)^k A_3 . \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (2) maka $p\left(k + 1 \right)$ benar. ■

Oleh karena Langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka Teorema 4 terbukti.

3.2 *Trace* Matriks Khusus 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Trace matriks khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat ini dibagi menjadi dua yaitu *trace* matriks khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif dan *trace* matriks khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat negatif. Dengan menggunakan Teorema 4, maka diperoleh bentuk umum *trace* matriks khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif, yang diberikan pada Teorema 5 berikut.

Teorema 5 Jika diberikan matriks

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$$

maka

$$tr\left(A_3 \right)^n = \left(a + b + c \right)^n \text{ dengan } n \in Z^+ .$$

Bukti:
Teorema ini akan dibuktikan dengan pembuktian langsung. Dengan menggunakan Teorema 4, maka $(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1} A_3$. dengan $n \in Z^+$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tr\,(A_3)^n &= tr\left((a+b+c)^{n-1} A_3\right) \\ &= (a+b+c)^{n-1}\, tr\,(A_3) \quad \{\text{Berdasarkan Teorema 3 bagian } (2)\} \\ &= (a+b+c)^{n-1}(a+b+c) \\ &= (a+b+c)^{(n-1)+1} \\ &= (a+b+c)^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pembuktian Teorema 5 selesai dan terbukti.

Untuk bentuk umum *trace* matriks khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat negatif tidak diperoleh hasilnya. Disebabkan determinan dari matriks tersebut adalah nol (0) yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$\det(A_3) = \det\left(\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\right) = \left|\begin{matrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & a \\ b & b \\ c & c \end{matrix}\right|$$

$$= (abc + abc + abc) - (abc + abc + abc) = 0$$

Maka invers matriks khusus 3x3 pada Persamaan (1) tidak ada. Artinya perpangkatan matriks khusus pada Persamaan (1) berpangkat bilangan bulat negatif tidak dapat dilakukan, yang mengakibatkan bentuk umumnya tidak diperoleh.

3.3 Contoh Aplikasi *Trace* Matriks Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Bagian ini merupakan aplikasi dari dua bentuk umum yang telah diperoleh yang tertuang dalam Teorema 4 dan Teorema 5. Aplikasi yang diberikan disini dalam bentuk contoh soal.

Contoh 1 Diberikan matriks

$$(A_3) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $(A_3)^{80}$ dan $tr\,(A_3)^{80}$!

Penyelesaian:
Berdasarkan Teorema 4 maka $(A_4)^{80}$ yaitu

$$(A_3)^{80} = (a+b+c)^{79} A_3$$

$$= (3+12+25)^{79} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \end{bmatrix} = (40)^{79} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 5 maka $tr\,(A_4)^{80}$ yaitu

$$tr\,(A_3)^{80} = (a+b+c)^{80} = (3+12+2)^{80} = (40)^{80}$$

Contoh 2 Diberikan matriks

$$\left(A_3\right)=\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $\left(A_3\right)^{65}$ dan $tr\left(A_3\right)^{65}$!

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 4 maka $\left(A_6\right)^{65}$ yaitu

$$\left(A_3\right)^{65}=\left(a+b+c\right)^{64}A_3$$

$$=\left(\left(-1/2\right)+\left(\sqrt{2}\right)+\left(-0{,}5\right)\right)^{64}\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$=\left(-1+\left(\sqrt{2}\right)\right)^{64}\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 5 maka $tr\left(A_3\right)^{65}$ yaitu

$$tr\left(A_6\right)^{65}=\left(a+b+c\right)^{65}=\left(\left(-1/2\right)+\left(\sqrt{2}\right)+\left(-0{,}5\right)\right)^{65}=\left(-1+\left(\sqrt{2}\right)\right)^{65}$$

4. Kesimpulan

Setelah diperoleh hasil dari penelitian ini, maka dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu:

(i) Apabila diberikan bentuk matriks khusus pada Persamaan (1), yaitu:

$$A_3=\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$$

sehingga dapat ditentukan bentuk umum perpangkatan matriks tersebut berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$\left(A_3\right)^n=\left(a+b+c\right)^{n-1}A_3. \text{ dengan } n\in Z^+$$

(ii) Dengan matriks khusus pada Persamaan (1) juga dapat ditentukanbentuk umum *trace* matriks khusus 3x3 berpangkat bilangan positif. yaitu:

$$tr\left(A_3\right)^n=\left(a+b+c\right)^n \text{ dengan } n\in Z^+.$$

Daftar Pustaka

[1] A. V. Zarelua, "On congruences for the traces of powers of some matrices," *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 263, no. 1, pp. 78–98, 2008.

[2] H. Avron, "Counting Triangles in Large Graphs using Randomized Matrix Trace Estimation Categories and Subject Descriptors," *Kdd-Ldmta*, 2010.

[3] C. Brezinski, P. Fika, and M. Mitrouli, "Estimations of the trace of powers of

positive self-adjoint operators by extrapolation of the moments," *Electron. Trans. Numer. Anal.*, vol. 39, pp. 144–155, 2012.

[4] J. Pahade and M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices," *Adv. Linear Algebr. & Matrix Theory*, vol. 05, no. 04, pp. 150–155, 2015.

[5] F. Aryani and M. Solihin, "Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017.

[6] F. Aryani and T. Fatonah, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," in *Prosiding Semirata Medan*, 2018.

[7] F. Aryani and Yulianis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 4, no. 2, 2018.

[8] H. Anton, *Elementary Linear Algebra*, Fifth Ed. New York: JohnWiley & Sons, 1987.

[9] H. Anton and C. Rorres, *Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi*, Ketujuh. Jakarta: Erlangga, 2004.

[10] James E. Gentle, *Matrix Algebra*. New York: Springer, 2007.

[11] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator, 2006.