Jurnal Sains Matematika dan Statistika
Vol. 7, No. 1, Januari 2021 Hal. 96-104

ISSN : 2460-4542 (print)
ISSN : 2615-8663 (online)
DOI : http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v7i1.12193

Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Ade Novia Rahma[1], Zharifatul Aqilah[2]
[1,2,] Prodi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id[1], zharifatul.aqilah@gmail.com[2]
*Korespondensi penulis: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor. Sebelum menentukan determinan, maka terlebih dahulu ditentukan bentuk umum matriks Hankel berpangkat bilangan bulat positif dengan memperhatikan bentuk pola ${A_3}^2$ sampai ${A_3}^{10}$ yang dinotasikan dengan ${A_3}^n$ dan membuktikannya dengan induksi matematika. Selanjutnya ditentukan determinan matriks ${A_3}^n$ dengan memperhatikan bentuk pola determinan dari ${A_3}^2$ sampai ${A_3}^{10}$yang dinotasikan dengan $|{A_3}^n|$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bentuk umum matriks dan determinan dari matriks Hankel bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

Kata kunci: *Determinan, Matriks, Matriks Hankel, Perpangkatan matriks*

Abstract

This research aims to determine the determinant Hankel matrix of a special form of the order of 3×3 with positive integer using the cofactor expansion. Before determining the determinant, we first determine the general form of the Hankel matrix with positive integers concerning the shape of the patterns ${A_3}^2$ to ${A_3}^{10}$ which is denoted by ${A_3}^n$ and prove it by mathematical induction. The second is to determine the determinant of the ${A_3}^n$ matrix is determined by observing the shape of the determinant pattern from ${A_3}^2$ to ${A_3}^{10}$ denoted by $|{A_3}^n|$ and prove it with direct proof. Based on the results of this research obtained a general form of the matrix and determinant of the Hankel matrix of special shapes with positive integer rank.

Keywords: *Determinant, Matrix, Hankel matrix, Matrix power*

1. Pendahuluan

Menurut [6] matriks Hankel ke-n dari urutan $a=(a_n)$ dengan $n\geq 0$ adalah matriks $(n+1)\times(n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j}. Bentuk umum dari matriks Hankel adalah sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Pada penelitiannya [6] disajikan evaluasi determinan matriks Hankel dari faktorial umum. Metode yang digunakan yaitu eksponensial Array Riordan, polinomial Eulerian dan polinomial Eksponensial.

Selanjutnya pada tahun 2018, telah ditulis kembali mengenai matriks Hankel yang membahas mengenai determinan dan invers dari matriks Hankel bentuk umum yang telah diblok menggunakan metode komplemen Schur. Setelah matriks tersebut diblok akan membentuk matriks Hankel ganjil $H=\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$ dan matriks Hankel genap $H=\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$. Setelah diperoleh komplemen Schur dari submatriks, maka diperoleh rumus umum menentukan determinan dan invers matriks Hankel ukuran ganjil sebagai berikut:

$$\det(H)=\det(A)\cdot\det(D-B^TA^{-1}B)$$

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}(B(D-B^TA^{-1}B))^{-1}B^TA^{-1} & -A^{-1}B(D-B^TA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-B^TA^{-1}B)^{-1}B^TA^{-1} & (D-B^TA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

dan ukuran genap sebagai berikut:

$$\det(H)=\det(A)\cdot\det(D-BA^{-1}B)$$

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}(D-BA^{-1}B)^{-1}BA^{-1} & -A^{-1}B(D-BA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-BA^{-1}B)^{-1}BA^{-1} & (D-BA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

Kedua rumus ini dapat digunakan dengan syarat A *non-singular*. Rumus umum dari determinan dan invers matriks Hankel dapat digunakan untuk ukuran matriks yang lebih besar atau sama dengan tiga, dengan syarat salah satu submatriks dari matriks Hankel dan komplemen Schur-nya adalah *non-singular* [3].

Matriks Hankel pada penelitian sebelumnya itu menentukan bentuk umum determinan dan bentuk umum invers dari Persamaan (1), pada tulisan ini penulis akan membahas bentuk umum perpangkatan matriks Hankel sekaligus menentukan bentuk umum determinan matriks Hankel berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1). Menyelesaikan determinan dari suatu matriks Hankel tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut matriks berpangkat maka untuk menghitung determinannya harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n kali sehingga untuk menghitung determinan matriks dan bentuk umum berpangkat nya cukup rumit. Sehingga penulis tertarik melakukan penelitian tentang matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3, dengan $a_{11}=a_{13}=a_{22}=a_{31}=a$ dan $a_{12}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=a_{33}=0$ atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R \tag{2}$$

2. Metode Penelitian

Matriks dilambangkan dengan huruf kapital, sedangkan entri (elemen) dilambangkan dengan huruf non kapital. Dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut ordo, yaitu banyak baris × banyak kolom (tanda × bukan menyatakan perkalian, tetapi hanya sebagai tanda pemisah). Secara umum sebuah matriks A berordo $m \times n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A = \left[a_{ij}\right]$$

dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$. Indeks pertama (i) menyatakan baris ke-i dan indeks kedua (j) menyatakan kolom ke-j.

Dua matriks dikatakan sama jika ordonya sama dan entri yang seletak bernilai sama, sehingga jika matriks A dan B sama maka dapat menulis $A = B$. Sebagai contoh, jika matriks A seperti bentuk umum di atas dan $B = \left[b_{ij}\right]$ dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$, dan $A = B$, maka berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Definisi 1 [2] Jika A adalah suatu matriks persegi maka didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak-negatif dari matriks A adalah:

$$A^0 = I$$
$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n faktor}$$

Jika A dapat dibalik, maka pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n faktor}$$

Teorema 1 [2] Jika A adalah matriks persegi dan r serta s adalah bilangan bulat, maka

$$A^r A^s = A^{r+s}$$
$$(A^r)^s = A^{rs}$$

Teorema 2 [2] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

1. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, untuk $n = 0,1,2, \ldots$
3. Untuk setiap skalar k yang tak sama dengan nol, maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Definisi 2 [6] matriks Hankel ke-n dari urutan $a=(a_n)$ dengan $n \geq 0$ adalah matriks $(n+1)\times(n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j}.

Matriks Hankel adalah matriks yang semua elemen di sepanjang diagonal $i+j$ konstan, artinya setiap kemiringan diagonal dari kiri ke kanan adalah konstan. Secara umum, bentuk matriks Hankel sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Dari segi komponen, jika entri (i,j) elemen dari A dilambangkan dengan A_{ij}, dan dengan asumsi $i \leq j$, maka: $A_{i,j} = A_{i+kj-k}$, untuk semua $k = 0, \dots, j-i$. Matriks Hankel adalah matriks simetris.

Misalkan A adalah suatu matriks persegi. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A [1].

Definisi 3 [2] Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari entri a_{ij}.

Definisi 4 [2] Jika A adalah matriks berukuran $n\ x\ n$, maka bilangan yang dihasilkan dari perkalian entri-entri di setiap baris atau kolom A oleh kofaktor yang bersesuaian lalu menjumlahkan hasil perkalian tersebut dikatakan determinan A. Jumlah-jumlah dari keseluruhannya disebut ekspansi kofaktor dari A yang dituliskan sebagai berikut:

ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$:

$$det\,(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$:

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Definisi 5 [5] Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini dengan cara:

1. $p(1)$ benar
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar, maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini berisi tentang proses untuk menentukan bentuk umum dari perpangkatan matriks Hankel bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Langkah pertama yaitu menentukan perpangkatan matriks $A_3^{\ 2}$ sampai $A_3^{\ 10}$ sebagai berikut.

$$A_3^{\ 2} = A_3 \cdot A_3$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

dengan cara yang sama, maka didapatkan:

$$A_3^{\ 3} = \begin{bmatrix} 3a^3 & 0 & 2a^3 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 2a^3 & 0 & a^3 \end{bmatrix} \qquad A_3^{\ 7} = \begin{bmatrix} 21a^7 & 0 & 13a^7 \\ 0 & a^7 & 0 \\ 13a^7 & 0 & 8a^7 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{\ 4} = \begin{bmatrix} 5a^4 & 0 & 3a^4 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 3a^4 & 0 & 2a^4 \end{bmatrix} \qquad A_3^{\ 8} = \begin{bmatrix} 34a^8 & 0 & 21a^8 \\ 0 & a^8 & 0 \\ 21a^8 & 0 & 13a^8 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{\ 5} = \begin{bmatrix} 8a^5 & 0 & 5a^5 \\ 0 & a^5 & 0 \\ 5a^5 & 0 & 3a^5 \end{bmatrix} \qquad A_3^{\ 9} = \begin{bmatrix} 55a^9 & 0 & 34a^9 \\ 0 & a^9 & 0 \\ 34a^9 & 0 & 21a^9 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{\ 6} = \begin{bmatrix} 13a^6 & 0 & 8a^6 \\ 0 & a^6 & 0 \\ 8a^6 & 0 & 5a^6 \end{bmatrix} \qquad A_3^{\ 10} = \begin{bmatrix} 89a^{10} & 0 & 55a^{10} \\ 0 & a^{10} & 0 \\ 55a^{10} & 0 & 34a^{10} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuk umum $A_3^{\ n}$ dinyatakan dalam Teorema 1 sebagai berikut:

Teorema 3. Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\forall a \in R$. Maka

$$A_3^{\ n} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^n \end{bmatrix}, n \geq 1 \quad (3)$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misalkan

$$p(n): A_3^{\,n} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^n \end{bmatrix}, n \ge 1$$

dibuktikan sebagai berikut:

1. Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A_3 = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1}\right)\right)a^1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right)\right)a^1 \\ 0 & a^1 & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right)\right)a^1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1-1}\right)\right)a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (2), maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_3^{\,k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^k & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^k & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan $n = k + 1$, $p(k + 1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_3^{\,k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right)a^{k+1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^{k+1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^{k+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pembuktiannya:

$$A^{k+1} = A_3^{\,k} \cdot A_3^{\,1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^k & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^k & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right)a^{k+1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)a^{k+1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (4) maka $p(k+1)$ benar.
Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A_3^{\,n}=\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^n \end{bmatrix}, n\geq 1$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema 1 terbukti.

Selanjutnya menentukan determinan matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode ekspansi kofaktor. Determinan matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat 2 sampai 10 disajikan dalam Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus $A_3^{\,n}$

No.	Matriks Hankel bentuk khusus $A_3^{\,n}$	Determinan
1	$A_3^{\,2}$	a^6
2	$A_3^{\,3}$	$-a^9$
3	$A_3^{\,4}$	a^{12}
4	$A_3^{\,5}$	$-a^{15}$
5	$A_3^{\,6}$	a^{18}
6	$A_3^{\,7}$	$-a^{21}$
7	$A_3^{\,8}$	a^{24}
8	$A_3^{\,9}$	$-a^{27}$
9	$A_3^{\,10}$	a^{30}

Setelah mendapatkan determinan matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat 2 sampai 10 yaitu pada Tabel 1, maka dapat diduga bentuk umum dari determinan matriks Hankel bentuk khusus tersebut berdasarkan pola rekursifnya, yaitu $|A^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1$.

Berdasarkan dugaan tersebut, maka didapat bentuk umum $|A_3{}^n|$ dari Persamaan (2) yang dinyatakan dalam Teorema 4 sebagai berikut:

Teorema 4 Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a \in R$ maka

$$|A^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1 \tag{5}$$

Bukti: Dari Teorema 3 didapat bentuk umum $A_3{}^n$ yang akan digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum determinan menggunakan pembuktian langsung dengan ekspansi kofaktor baris pertama sebagai berikut:

$$\left|A_3{}^n\right| = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + 2\right)a^{3n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)^n\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) + 2\right)a^{3n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{4}\right)^n\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) + 2\right)a^{3n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{4}\right)^n\left(-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{-2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{-2}\right) + 2\right)a^{3n}$$

$$= \frac{1}{5}(-1)^n\left(\frac{6}{2} + 2\right)a^{3n}$$

$$= \frac{1}{5}(-1)^n 5a^{3n}$$

$$= (-1)^n a^{3n}$$

Dari pembuktian di atas, maka Teorema 4 terbukti.

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini diperoleh suatu kesimpulan Matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat diperoleh pola perpangkatan matriks yang menghasilkan teorema pada Persamaan (3), kemudian juga diperoleh bentuk umum determinan matriks Hankel dengan menduga pola determinan dari setaip perpangkatan matriks Hankel yang menghasilkan bentuk umum determinan pada Persamaan (5).

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., dan Chris R. “*Aljabar Linear Elementer Edisi kedelapan*. Erlangga, Jakarta. 2004.

[2] Anton, H., dan Chris R. “*Elementary Linear Algebra 11th edition*”. Wiley, Amerika. 2013.

[3] Indrawati, Sri Muliani. “*Metode Komplemen Schur Untuk Menentukan Determinan dan Invers Matriks Hankel dengan Blok Matriks* 2×2”. Skripsi Universitas Halu Oleo, Sulawesi Tenggara. 2018.

[4] Kusumawati, Ririen. “*Aljabar Linear dan Matriks*”. UIN-Maliki Press, Malang. 2014.

[5] Munir, Rinaldi. “*Matematika Diskrit Edisi Ketiga*”. Informatika, Bandung. 2005.

[6] Yang, Sheng-Liang dan Yan-Ni Dong. “Hankel Determinants of The Generalized Factorials”. *Indian J. Pure Appl. Math*, 49(2), 217-225. 2017.