Jurnal Sains Matematika dan Statistika
Vol. 7, No. 1, Januari 2021 Hal. 28-37

ISSN : 2460-4542 (print)
ISSN : 2615-8663 (online)
DOI : http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v7i1.11561

Trace Matriks $n \times n$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Corry Corazon Marzuki[1*], Fitri Aryani[2], Rahmawati[3]

[1,2,3] Prodi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id[1], khodijah_fitri@uin-suska.ac.id[2], rahmawati@uin-suska.ac.id[3]
*Korespondensi penulis : corry@uin-suska.ac.id

Abstrak

Trace matriks adalah jumlahan dari entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujursangkar. Pada makalah ini akan ditentukan rumus umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan entri bilangan riil. Untuk memperoleh rumus umum dari *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif maka harus dilakukan pendugaan melalui pencarian perpangkatan matriks berbentuk khusus untuk beberapa ordo dan beberapa bilangan bulat positif sebagai pangkatnya. Selanjutnya rumus umum yang diduga akan dibuktikan menggunakan induksi matematika. Kemudian membuktikan *trace* matriks dengan pembuktian langsung.

Kata Kunci: *matriks, determinan, perpangkatan matriks, trace.*

Abstract

Trace matrix is the sum of the main diagonal element of a square matrix. In this paper, we will determine formula of trace of special matrix $n \times n$ *of positif integer power. To get the formula of the trace of special matrix positive integer , we must have an matrix multiplication* A_3^2 to A_3^{12}*. Then prove the general form an matrix multiplication* $(A_3)^n$*, and the prove using mathematical induction. And then to the prove* $tr\ (A_3)^n$ *by using direct proof.*

Keywords: *matrix, determinant, matrix multiplication, trace.*

1. Pendahuluan

Menurut [1], misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar, *trace* matriks A merupakan penjumlahan entri-entri pada diagonal utama dari matriks A dan dinotasikan dengan *tr(A)*. Beberapa peneliti sudah banyak yang membahas mengenai *trace* matriks. Pada tahun 2015, J. Pahade dan M.Jha [2] membahas mengenai rumus umum *trace* matriks orde *2x2* berpangkat bilangan bulat positif. Selanjutnya pada tahun 2012, C. Brezinski, dkk. [3] menemukan bahwa *trace* suatu matriks diaplikasikan di beberapa bidang matematika, seperti teori bilangan, analisis jaringan, sistem dinamik, persamaan differensial, dan teori matrik.

Pada tahun 2017, F. Y. Nengsih [4] membahas tentang cara menentukan rumus umum *trace* dari matriks kompleks orde 2 berpangkat bilangan bulat positif. Pembahasan mengenai *trace* juga telah dibahas oleh Yulianis [5], yang membahas mengenai rumus umum *trace* matriks yang dibentuk secara khusus dengan entri bilangan real dan bilangan kompleks berpangkat bilangan bulat negatif. Kemudian pada tahun 2018 pembahasan tentang *trace* matriks dibahas oleh R. Andesta [6], yang membahas tentang rumus umum *trace* matriks berbentuk khusus 3×3 dengan pangkat bilangan bulat positif dengan entri bilangan real.

Penelitian tentang *trace* ini terus berkembang hingga pada tahun 2020, F. Aryani [9] membahas bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap dipangkatkan -2, -3, dan -4. F. Aryani [10] dan [11] membahas bentuk umum *trace* matriks segitiga berukuran 4x4 dan 5x5 berpangkat bilangan bulat positif.

Pada penelitian ini akan ditentukan rumus umum *trace* matriks $n \times n$ yang berbentuk khusus dengan pangkat bilangan bulat positif. Adapun bentuk khusus dari matriks yang akan dibahas adalah:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix} \text{ dengan } a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

2. Metode Penelitian

Pada penelitian ini dibutuhkan beberapa landasan teori mengenai perpangkatan matriks, trace matriks dan sifat-sifatnya, dan hasil penelitian sebelumnya mengenai trace matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif yang diperoleh oleh T. Fatonah [8]. Berikut dijelaskan definisi dari perpangkatan matriks, baik pangkat positif maupun pangkat negatif.

Definisi 1 [7] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, A^m = \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ faktor}} \, (m > 0)$$

Selanjutnya, jika A *invertible*, maka pangkat integer negatif dari A adalah

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{m \text{ faktor}}$$

Teorema 1 menyatakan sifat-sifat perpangkatan matriks.

Teorema 1 [7] Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangaan bulat, maka :

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

Berikut ini akan dijelaskan definisi *trace* matriks, yang hanya terdefinisi pada matriks bujursangkar.

Definisi 2 [7] Misalkan A adalah matriks bujursangkar. *Trace* dari A (*trace of* A), biasa ditulis $tr(A)$ adalah penjumlahan entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat ditentukan jika A bukan matriks bujursangkar.

Pada Teorema 2 dijelaskan sifat-sifat *trace* matriks bujursangkar.

Teorema 2 [1] Jika A dan B adalah matriks bujursangkar berorde sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,
ii. $tr(cA) = c.tr(A)$,
iii. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$,
iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Berikut adalah hasil yang telah diperoleh oleh T. Fatonah [8] pada tahun 2017 mengenai *trace* matriks yang berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dengan entri matriks bilangan real. langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
2. Menentukan $\det(A)$, yaitu :
   $\det(A) = 0 - ab = -ab$
3. Menentukan rumus umum A^n untuk $n = 1,2, \ldots ,12$.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A^2.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^4 = A^3.A^1 = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix}$$
$$A^5 = A^4.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^6 = A^5.A^1 = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix}$$
$$A^7 = A^6.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^8 = A^7.A^1 = \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix}$$
$$A^9 = A^8.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^{10} = A^9.A^1 = \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix}$$
$$A^{11} = A^{10}.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^{12} = A^{11}.A^1 = \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat hasil perpangkatan matriks di atas, maka diduga rumus umum A^n adalah :

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2}$$

4. Membuktikan rumus umum A^n dengan induksi matematika.

Rumus umum A^n pada Persamaan (2) dinyatakan dalam Teorema 3 sebagai berikut:

Teorema 3 [8] Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pertama-tama, akan dibuktikan untuk n ganjil. Hal ini dibuktikan dengan induksi matematika.

Misalkan $p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$.

1. Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1 b^0 \\ a^0 b^1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2. Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= \left(A^k A^2\right) \\ &= \left(A^k . A . A\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ab\left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}\right) \\ ab\left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2, maka terbukti bahwa

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap menggunakan induksi matematika yaitu :

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

1. Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A^2 = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & 0 \\ 0 & a^1 b^1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2. Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= \left(A^k A^2\right) \\ &= \left(A^k . A . A\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} ab\left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}\right) & 0 \\ 0 & ab\left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2, maka terbukti $A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ untuk n genap.

Jadi, Teorema 3 terbukti benar. ■

5. Menentukan rumus umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap.

Teorema 4 [8] Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}} (\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti :

Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Berdasarkan Teorema 3 maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0 + 0 = 0\ .$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap.

Berdasarkan Teorema 3 maka dapat diduga rumus umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$
$$= a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2(-(-ab))^{\frac{n}{2}}\ .$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(A^n) = 2(-\det(A))^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}\ .$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap. ■

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Rumus Umum Matriks Berbentuk Khusus Orde $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Misalkan matriks $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$. Langkah pertama untuk menentukan rumus umum *trace* matriks A_n berpangkat bilangan bulat positif adalah menentukan *trace* dari matriks tersebut untuk beberapa bilangan bulat positif sebagai pangkatnya. Berikut akan ditentukan ${A_n}^m$ untuk $m = 1,2,3,4,5$.

1. $${A_n}^2 = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & \dots & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 \\ a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & \dots & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 & \dots & a^2 + a^2 + \cdots + a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} na^2 & na^2 & \dots & na^2 \\ na^2 & na^2 & \dots & na^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na^2 & na^2 & \dots & na^2 \end{bmatrix}$$

$$A_n{}^3 = \begin{bmatrix} na^2 & na^2 & \dots & na^2 \\ na^2 & na^2 & \dots & na^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na^2 & na^2 & \dots & na^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} na^3 + na^3 + \dots + na^3 & na^3 + na^3 + \dots + na^3 & \dots & na^3 + na^3 + \dots + na^3 \\ na^3 + na^3 + \dots + na^3 & na^3 + na^3 + \dots + na^3 & \dots & na^3 + na^3 + \dots + na^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na^3 + na^3 + \dots + na^3 & na^3 + na^3 + \dots + na^3 & \dots & na^3 + na^3 + \dots + na^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \\ n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \end{bmatrix}$$

2. $$A_n{}^4 = \begin{bmatrix} n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \\ n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2a^3 & n^2a^3 & \dots & n^2a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & \dots & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 \\ n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & \dots & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 & \dots & n^2a^4 + n^2a^4 + \dots + n^2a^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \\ n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \end{bmatrix}$$

3. $$A_n{}^5 = \begin{bmatrix} n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \\ n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^3a^4 & n^3a^4 & \dots & n^3a^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & \dots & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 \\ n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & \dots & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 & \dots & n^3a^5 + n^3a^5 + \dots + n^3a^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^4a^5 & n^4a^5 & \dots & n^4a^5 \\ n^4a^5 & n^4a^5 & \dots & n^4a^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^4a^5 & n^4a^5 & \dots & n^4a^5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk matriks perpangkatan dari $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$ diatas, diduga rumuk umum $A_n{}^m$ adalah sebagai berikut:

$$A_n{}^m = \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}.$$

Untuk menunjukkan dugaan tersebut benar, akan dibuktikan pada Teorema 5 berikut.

Teorema 5 Diberikan matriks $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$ maka:

$$A_n{}^m = \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

Bukti : Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika.

Misalkan $p(m): \ A_n{}^m = \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}$

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar,yaitu:

$$p(1): \ A_n{}^1 = \begin{bmatrix} n^{1-1}a^1 & n^{1-1}a^1 & \dots & n^{1-1}a^1 \\ n^{1-1}a^1 & n^{1-1}a^1 & \dots & n^{1-1}a^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{1-1}a^1 & n^{1-1}a^1 & \dots & n^{1-1}a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_n{}^1 = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan untuk $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): \ A_n{}^k = \begin{bmatrix} n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \\ n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu :

$$p(k+1): \ A_n{}^{k+1} = \begin{bmatrix} n^k a^{k+1} & n^k a^{k+1} & \dots & n^k a^{k+1} \\ n^k a^{k+1} & n^k a^{k+1} & \dots & n^k a^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^k a^{k+1} & n^k a^{k+1} & \dots & n^k a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A_n{}^{k+1} = A_n{}^{k}.A_n$$

$$= \begin{bmatrix} n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \\ n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{k-1}a^k & n^{k-1}a^k & \dots & n^{k-1}a^k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & \dots & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka \\ n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & \dots & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^kaa^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka & \dots & n^{k-1}a^ka + n^{k-1}a^ka + \cdots + n^{k-1}a^ka \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} nn^{k-1}a^ka & nn^{k-1}a^ka & \dots & nn^{k-1}a^ka \\ nn^{k-1}a^ka & nn^{k-1}a^ka & \dots & nn^{k-1}a^ka \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nn^{k-1}a^ka & nn^{k-1}a^ka & \dots & nn^{k-1}a^ka \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n^ka^{k+1} & n^ka^{k+1} & \dots & n^ka^{k+1} \\ n^ka^{k+1} & n^ka^{k+1} & \dots & n^ka^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^ka^{k+1} & n^ka^{k+1} & \dots & n^ka^{k+1} \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti $p(k+1)$ juga benar. ■

3.2 Rumus Umum Trace Matriks Berbentuk Khusus Orde $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berdasarkan bentuk umum perpangkatan matriks pada Teorema 5 maka diperoleh *trace* matriks berpangkatnya yang dinyatakan dalam Teorema 6 berikut :

Teorema 6 Misalkan matriks $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$, maka $tr(A_n{}^m) = (na)^m$.

Bukti : Berdasarkan bentuk umum perpangkatan matriks A_n yang diperoleh pada Teorema 5, maka diperoleh rumus umum $tr(A^n)$ yaitu:

$$tr(A_n{}^m) = tr \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix} = n.n^{m-1}a^m = n^ma^m = (na)^m.$$

4. Kesimpulan

Misalkan matriks $A_n = \left\{ \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \middle| a_{ij} = a \in \mathbb{R} \right\}$, dengan $a \in \mathbb{R}$ maka bentuk umum perpangkatan matriks A_n dengan pangkat bilangan bulat positif adalah: $A_n{}^m = \left\{ \left(b_{ij}\right)_{n\times n} \middle| b_{ij} = n^{m-1}a^m \text{ dengan } a \in \mathbb{R} \right\}$, dimana $m \in \mathbb{Z}$. Sedangkat rumus umum trace dari $A_n{}^m$ adalah : $tr(A_n{}^m) = (na)^m$.

Daftar Pustaka

[1] J. E. Gentle, *Matrix Algebra, Theory, Computations, and Applications in Statistics*, vol. 102. 2009.

[2] J. Pahade and M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices," *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, vol. 05, no. 04, pp. 150–155, 2015, doi: 10.4236/alamt.2015.54015.

[3] C. Brezinski, P. Fika, and M. Mitrouli, "Estimations of the trace of powers of positive self-adjoint operators by extrapolation of the moments," *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 39, pp. 144–155, 2012.

[4] F. Y. Nengsih, "*Trace Matriks Kompeks Orde 2 Berpangkat Bilangan Bulat*," Skripsi. UIN Sutan Syarif Kasim Riau," 2017.

[5] Yulianis, "*Trace Matriks Berbentuk khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*," 2017.

[6] R. Andesta, "*Trace matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif*". Skripsi. UIN Sutan Syarif Kasim Riau," 2018.

[7] A. Howard, *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi*. 2004.

[8] T. Fatonah, "Trace Matriks Berbentuk khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," 2017.

[9] F. Aryani, A.A. Nugraha, M. Faisal, Helsivianingsih, C.C. Marzuki, Trace Matriks Ketetanggaan n x n Berpangkat m = -2,-3,-4, *Prosiding SNTIKI 12*, 2020.

[10] F. Aryani, A.Rubbani, Haslinda, C.C. Marzuki, Rahmawati, Trace Matriks Segitiga 5 x 5 Berpangkat Bilangan Bulat, *Prosiding SNTIKI 12*, 2020.

[11] F. Aryani, M. Zawarni, K. Susilowati, Y. Muda, C.C. Marzuki, Rahmawati, Trace Matriks Segitiga 4 x 4 Berpangkat Bilangan Bulat, *Prosiding SNTIKI 12*, 2020.