Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 2, Juli 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK PADA GRAF SERI PARALEL $sp(m, 1, 3)$

Corry Corazon Marzuki[1], Laraza[2], Fitri Aryani[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id; larazayuliarti08@gmail.com; khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Pada paper ini ditentukan nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel $sp(m, 1,3)$ untuk $m \geq 4$. Penentuan nilai total ketakteraturan titik graf seri paralel dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Hasil dari penelitian ini, diperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf seri paralel $sp(m, 1,3)$ adalah $tvs(sp(m, 1,3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$, untuk $m \geq 4$.

Kata Kunci : *graf seri paralel, nilai total ketakteraturan titik, pelabelan total tak teratur titik*

ABSTRACT

In this paper found total vertex irregularity strength of series parallel $sp(m, 1,3)$ for $m \geq 4$. Determining the total vertex irregularity strength of series parallel $sp(m, 1,3)$ for $m \geq 4$ was conducted by determining the greatest lower bound and the smallest upper bound of the total vertex irregularity strength of series parallel $sp(m, 1,3)$. We found the total vertex irregularity strength of graph series parallel $sp(m, 1,3)$ is $tvs(sp(m, 1,3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$, for $m \geq 4$.

Keywords: *irregular total k-labeling , graph series parallel, total vertex irregularity strength.*

Pendahuluan

Menurut Bondy dan Murty [4], teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang terus dikembangkan. Suatu graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik (*vertices atau node*), dan E merupakan himpunan sisi, bersama-sama dengan suatu fungsi insidensi $\varphi(G)$ yang mengaitkan setiap sisi dari G dengan pasangan titik di G.

beberapa pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemasangan nilai bilangan ke setiap titik, sisi, atau keduanya. Rismawati [13] mengatakan bahwa pelabelan graf terdiri dari berbagai macam diantaranya pelabelan total tak teratur, pelabelan ajaib, pelabelan harmoni dan pelabelan anti ajaib.

Baĉa dkk. [3] mendefinisikan pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik dan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik x pada pelabelan ini adalah jumlah label titik x dan semua sisi yang terkait pada x. Bobot titik x diperoleh dari $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$. Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Ahmad, dkk. [1] memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf barisan diagonal $tvs(DL_n) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$, dan graf *triangular snake* $tvs(TS_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil$ untuk $n \geq 7$. Pada tahun 2017, S. Aarthi [2] memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf helm $tvs(H_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n \geq 4$. Pada tahun 2018, P. Jeyanthi dkk. [6] juga memperoleh nilai total ketakteraturan dari beberapa graf, diantaranya: $tvs(CQ_n) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ dari graf siklus quadrilateral snake untuk $n \geq 3$, $tvs(SF_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ dari graf *Sunflower* untuk $n \geq 3$, dan $tvs(DW_n) = \left\lceil \frac{2n+3}{4} \right\rceil$ dari graf roda ganda untuk $n \geq 3$. Pada tahun yang sama, Marzuki, dkk. [8], memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \odot P_2$ adalah $tvs(P_m \odot P_2) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f pada G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Pada tahun 2015, Rajasingh dkk. [11] memperkenalkan nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri paralel. Graf seri paralel merupakan pengembangan dari graf theta yang diperumum. Aplikasi dari graf seri paralel dapat diasumsikan pada rangkaian listrik, dimana dalam rangkaian listrik terdapat rangkaian seri dan rangkaian paralel. Di dalam penelitiannya, Rajasingh dan Arockiamary [11] memperoleh $tes\left(sp(m,r,l)\right) \geq \left\lceil \frac{lm(r+1)+2}{3} \right\rceil$. Pada makalah ini akan ditentukan rumus umum nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel $(m, 1,3)$ untuk $m \geq 4$.

Bahan dan Metode Penelitian

Berikut ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang dibutuhkan dalam menentukan rumus umum nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel $(m, 1,3)$ untuk $m \geq 3$.

Definisi 1 [9] Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertices atau node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges atau arcs*) yang menghubungkan sepasang titik.
Definisi 1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi satu buah pun, tetapi titik harus ada, minimal satu. Graf yang tidak memiliki sisi dan hanya mempunyai satu titik disebut graf trivial.

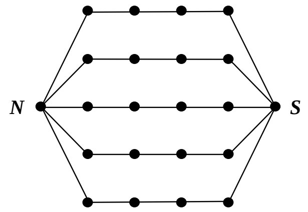
Titik pada graf dapat diberi nama dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, atau dengan bilangan asli $1,2,3, \dots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan $e = uv$. Banyaknya titik dari graf $G = (V, E)$ disebut order yang dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan banyaknya sisi dari graf $G = (V, E)$ disebut *size* yang dinotasikan dengan $E(G)$ [9].

Munir dkk. [9] menyebutkan bahwa graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori atau jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dpandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

1. Graf Theta yang Diperumum dan Graf Seri Paralel

a. Graf Theta yang Diperumum

Definisi 2 [11] Graf theta yang diperumum $\Theta(n, m)$ atau graf theta dengan *n* titik, mempunyai dua titik *N* dan *S* berderajat *m*, sehingga setiap titik lainnya berderajat 2 dan merentang pada salah satu dari *m* lintasan, yang menghubungkan titik *N* dan *S*. Kedua titik *N* dan *S* masing-masing disebut kutub utara dan kutub selatan. Lintasan antara kutub selatan dan kutub utara disebut *longitude*. Sebuah *longitude* dilambangkan dengan *L*.

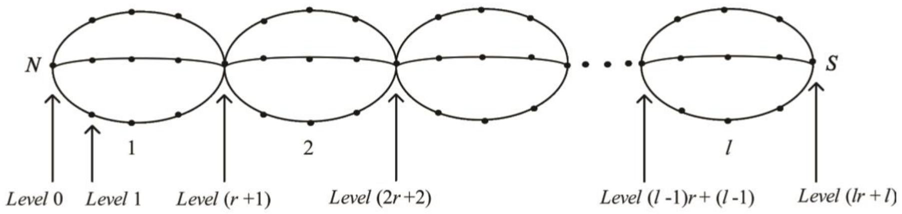


Gambar 1 Graf Theta $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{4},\mathbf{5})$

Graf theta $\Theta(n,l)$ dikatakan seragam jika $|L_1| = |L_2| =\ldots= |L_l|$, dengan L_i adalah *longitude* dari $\Theta(n,l)$. Pada paper ini, akan digunakan komposisi seri dari graf theta seragam yang akan didefinisikan sebagai berikut.

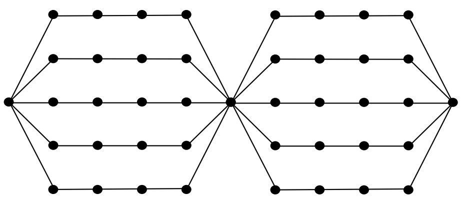
b. Graf Seri Paralel

Definisi 3 [11] Graf seri paralel adalah gabungan graf theta $G = G_1 \circ G_2 \circ G_3 \ldots G_l$, dimana $G_i = \Theta(rm+2, m, r)$, dengan m adalah *longitude* pada setiap graf theta, r adalah jumlah titik berderajat dua yang merentang pada setiap *longitude* dan $i = 1, 2, \ldots, l$, yaitu banyaknya graf theta. *Level* pada graf dinotasikan dengan *Level* 0, *Level* 1, …, *Level* $(r+1)$, *Level* $(r+2)$, …, *Level* $(lr+l-1)$ dan *Level* $(lr+l)$.



Gambar 2 *Level* pada $\boldsymbol{sp}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})$

Graf seri paralel dilambangkan dengan $sp(m,r,l)$, dengan m adalah *longitude* pada setiap graf theta, r adalah jumlah titik berderajat dua yang merentang pada setiap *longitude* dan l adalah jumlah graf theta seragam.



Gambar 3 Graf Seri Paralel $\boldsymbol{sp}(\mathbf{5},\mathbf{4},\mathbf{2})$

Pada Gambar 3, diberikan contoh graf seri paralel $sp(5,4,2)$, dimana terdapat 5 *longitude* pada setiap graf theta, 4 titik pada setiap *longitude* dan 2 buah graf theta.

2. Pelabelan Graf

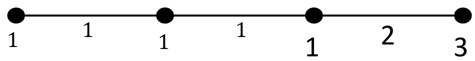
Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Suatu pelabelan graf disebut *pelabelan titik* jika domain dan fungsinya adalah himpunan titik, dan disebut *pelabelan sisi* jika domainnya adalah himpunan sisi dan jika domainnnya gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut disebut *pelabelan total*.

Definisi 4 [14] Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v pada pelabelan total adalah label titik v ditambah dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 2, Juli 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv) \ .$$

Contoh 1



Gambar 4 Pelabelan Total pada P_4

Misalkan f adalah pelabelan total pada P_4 seperti pada Gambar 2.13, yaitu:
$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_1v_2) = f(v_2v_3) = 1$
$f(v_4) = 3$
$f(v_3v_4) = 2.$
Maka bobot titikv_1, v_2, v_3 dan v_4 masing-masing adalah
$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) = 1 + 1 = 2$
$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 1 = 3$
$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 1 + 1 + 2 = 4$
$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3v_4) = 3 + 2 = 5.$

Tahun 2007, Baĉa ,dkk. [3] memperkenalkan dua jenis dari pelabelan total tak teratur yaitu: pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Berikut ini penjelasan tentang pelabelan total tak teratur berdasarkan jenis-jenisnya:

1. Pelabelan Total Tak Teratur Titik

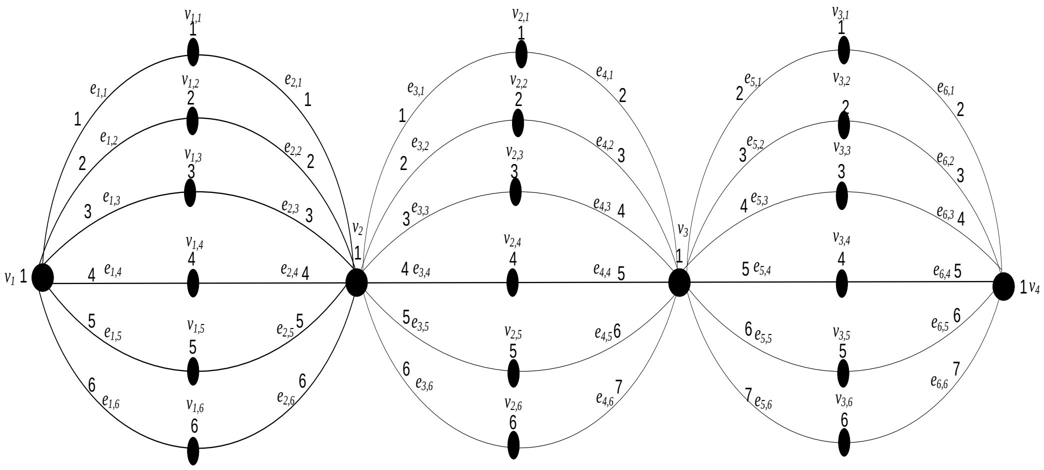
Pada tahun 2007, Baca dkk. [3] memperkenalkan pelabelan nilai total ketidakteraturan titik. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak digunakan untuk mencari nilai total tak keteraturan titik dari berbagai macam graf. Berikut definisi dari pelabelan total tak teratur titik:

Definisi 5 [3] Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G, jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$, dimana

$$wt(x) = f(x) + \sum_{ux \in E} f(ux).$$

Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Berikut akan disajikan contoh pelabelan-k total tak teratur titik pada graf $sp(6,1,3)$.



Gambar 5 Pelabelan-7 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(6,1,3)$

Perhatikan bahwa bobot titik pada graf $sp(6,1,3)$ berbeda semua. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-7 total tak teratur titik pada graf $sp(6,1,3)$.

Baĉa dkk. [3] memberikan nilai batas atas dan batas bawah untuk nilai total ketakteraturan titik pada teorema sebagai berikut:

Teorema 1 [3] Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ, maka:

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1.$$

Teorema 2 [10] Misalkan G adalah suatu graf yang mempunyai n_i titik berderajat i dengan $i = \delta, \delta+1, \delta+2, \ldots \Delta$ dengan δ dan Δ adalah derajat minimum dan maksimum titik dari G, maka

$$tvs(G) \ge max\left\{ \left\lceil \frac{\delta+n_\delta}{\delta+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta+n_\delta+n_{\delta+1}}{\delta+2} \right\rceil, \ldots, \left\lceil \frac{\delta+\sum_{i=\delta}^{\Delta}(n_i)}{\Delta+1} \right\rceil \right\}.$$

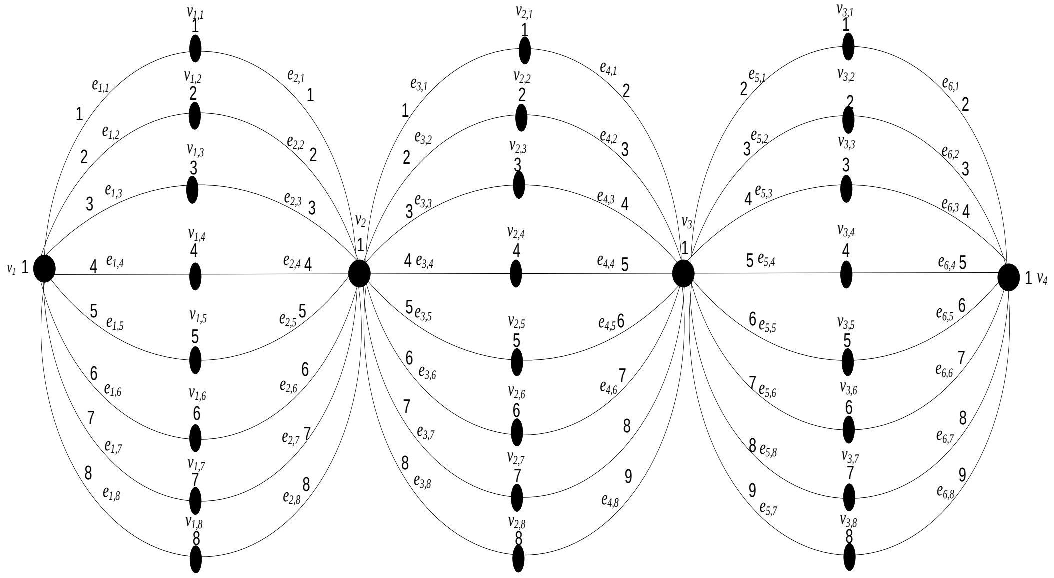
Teorema 3 [1] Nilai total ketakteraturan titik dari graf barisan diagonal untuk $n \ge 3$ adalah

$$tvs(DL_n) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil.$$

2. Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Pada tahun 2007, Baca memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yaitu pelabelan nilai total ketidakteraturan sisi. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi:

Definisi 6 [3] Pelabelan-k total dikatakan pelabelan total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sembarang dua sisi $e = u_1v_1$ dan $w = u_2v_2$ yang berbeda di graf G berlaku $wt(e) \ne wt(w)$, dengan $wt(e) = f(u_1) + f(e) + f(v_1)$ dan $wt(w) = f(u_2) + f(w) + f(v_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.



Gambar 6 Pelabelan-9 Total Tak Teratur Sisi Pada Graf $sp(8,1,3)$

Perhatikan bahwa bobot sisi pada graf $sp(8,1,3)$ berbeda semua. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-9 total tak teratur sisi pada graf $sp(8,1,3)$.

Baĉa , dkk. [3] memberikan nilai $tes(G)$ dari sebarang graf pada teorema berikut ini:

Teorema 4 [3] Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka:

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|.$$

Pelabelan total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh I.Rajasingh, dkk., dan digunakan untuk menentukan batas bawah dari nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri paralel $sp(m, r, l)$.

Teorema 5 [11] Diberikan $sp(m, r, l)$, $l \geq 2$ adalah graf seri paralel, maka

$$tes(sp(m, r, l) = \left\lceil \frac{lm(r+1)+2}{3} \right\rceil$$

Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan teorema tentang nilai total ketakteraturan titik dari graf $sp(m, 1,3)$.

Teorema 6. Nilai total ketakteraturan titik dari graf seri paralel $(m, 1,3)$ untuk $m \geq 4$ adalah

$$tvs\big(sp(m, 1,3)\big) = \left\lceil \frac{3m + 2}{3} \right\rceil$$

Bukti:

Pertama-tama, akan dibuktikan $tvs\big(sp(m, 1,3)\big) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Perhatikan bahwa derajat titik terkecil dari graf $sp(m, 1,3)$ adalah 2 dan jumlah titik yang berderajat dua pada graf $sp(m, 1,3)$ adalah $3m$. Agar mendapat pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 kita beri label yang dimulai dari $3,4,5, \ldots, 3m + 2$. Sementara bobot titik graf $sp(m, 1,3)$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang saling terhubung dengan titik tersebut. Oleh karena itu, diperoleh label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Jadi, kita dapatkan untuk $tvs\big(sp(m, 1,3)\big) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $tvs\big(sp(m, 1,3)\big) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ total tak teratur titik dari graf $sp(m, 1,3)$ untuk m bilangan asli dan $m \geq 4$, yaitu:

a. Pelabelan titik dari graf $sp(m, 1,3)$ sebagai berikut:

$$\lambda(v_1) = \begin{cases} 5 & ; \, jika \; m = 4 \\ 3 & ; \, jika \; m = 5 \\ 1 & ; \, jika \; m \geq 6 \end{cases}$$

$$\lambda(v_2) = 1$$

$$\lambda(v_3) = 1$$

$$\lambda(v_4) = \begin{cases} 4 & ; \, jika \; m = 4 \\ 1 & ; \, jika \; m \geq 6 \end{cases}$$

$\lambda\big(v_{i,j}\big) = j$ untuk $j = 1,2, \ldots, m$ dan $i = 1,2,3$

b. Pelabelan sisi dari graf $sp(m, 1,3)$ sebagai berikut:

$$\lambda\big(e_{i,j}\big) = \begin{cases} j & ; \, jika \; i = 1,2,3 \\ j + 1 & ; \, jika \; i = 4,5,6 \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan diatas, diperoleh bobot titik dari graf $sp(m,1,3)$ untuk $m \geq 4$ sebagai berikut:

$$wt(v_{1,j}) = \lambda(v_{1,j}) + \lambda(e_{1,j}) + \lambda(e_{2,j}) = j + j + j = 3j$$

$$wt(v_{2,j}) = \lambda(v_{2,j}) + \lambda(e_{3,j}) + \lambda(e_{4,j}) = j + j + (j+1) = 3j + 1$$

$$wt(v_{3,j}) = \lambda(v_{3,j}) + \lambda(e_{5,j}) + \lambda(e_{6,j}) = j + (j+1) + (j+1) = 3j + 2$$

$$wt(v_1) = \lambda(v_1) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(e_{1,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m} j$$

$$= 1 + \frac{m + m^2}{2}$$

$$= \frac{m^2 + m + 2}{2}$$

$$= \begin{cases} 15 & ;\ jika\ m = 4 \\ 18 & ;\ jika\ m = 5 \\ \dfrac{m^2 + m + 2}{2} & ;\ jika\ m \geq 6 \end{cases}$$

$$wt(v_2) = \lambda(v_2) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(e_{2,j}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(e_{3,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m} j + \sum_{j=1}^{m} j$$

$$= 1 + 2\sum_{j=1}^{m} j$$

$$= 1 + 2\left(\frac{m + m^2}{2}\right)$$

$$= 1 + m + m^2$$

$$wt(v_3) = \lambda(v_3) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(e_{4,j}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(e_{5,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m} (j+1) + \sum_{j=1}^{m} (j+1)$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 2, Juli 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$= 1 + 2\sum_{j=1}^{m}(j+1)$$

$$= 1 + 2\left(\frac{3m+m^2}{2}\right)$$

$$= 1 + 3m + m^2$$

$$wt(v_4) = \lambda(v_4) + \sum_{j=1}^{m}\lambda(e_{6,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m}(j+1)$$

$$= 1 + \frac{3m+m^2}{2}$$

$$= \frac{m^2+3m+2}{2}$$

$$= \begin{cases} 18 & ;\ jika\ m = 4 \\ \dfrac{m^2+3m+2}{2} & ;\ jika\ m \geq 6 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari $\{V(sp(m,1,3)) \cup E(sp(m,1,3))$ ke $\{1,2,\dots,\left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil\}\}$. Bobot titik pada graf seri paralel $sp(m,1,3)$:

i. Untuk $m = 4$ bobot titik $v_{i,j}$ dengan $i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,\dots,m$ adalah 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14. Sedangkan bobot titik v_i dengan $i = 1,2,3,4$ adalah 15,21,29,18. Jadi tidak ada bobot titik yang sama.

ii. Untuk $m = 5$ bobot titik $v_{i,j}$ dengan $i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,\dots,m$ adalah 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17. Sedangkan bobot titik v_i dengan $i = 1,2,3,4$ adalah 18,31,41,21. Jadi tidak ada bobot titik yang sama.

iii. Untuk $m \geq 6$ bobot titik $v_{i,j}$ yang dinotasikan dengan $wt(v_{1,j})$ adalah bilangan bulat positif mulai dari $3,6,9,\dots,3m$, $wt(v_{2,j})$ adalah bilangan bulat positif mulai dari $4,7,10,\dots,3m+1$, dan $wt(v_{3,j})$ adalah bilangan bulat positif mulai dari $5,8,11,\dots,3m+2$. Sedangkan bobot titik v_i yang dinotasikan dengan $wt(v_1)$ adalah $\frac{m^2+m+2}{2}$, $wt(v_2)$ adalah $1+m+m^2$, $wt(v_3)$ adalah $1+3m+m^2$, dan $wt(v_4)$ adalah $\frac{m^2+3m+2}{2}$.

Berikut akan ditunjukkan bahwa setiap bobot titik pada graf seri paralel $sp(m,1,3)$ berbeda. Akan ditunjukkan bahwa $wt(v_{3,j}) < wt(v_1) < wt(v_4) < wt(v_2) < wt(v_3)$.

1. Akan ditunjukkan $3m + 2 < \frac{m^2+m+2}{2}$ untuk $m \geq 6$.

   Basis Induksi :
   Untuk $m = 6$ benar, yaitu

$3 \cdot 6 + 2 < \dfrac{6^2 + 6 + 2}{2}$
$20 < \dfrac{44}{2}$
$20 < 22$

Langkah Induksi :

Asumsikan benar untuk $m = k$, yaitu

$3k + 2 < \dfrac{k^2 + k + 2}{2}$

Akan dibuktikan benar untuk $m = k + 1$, yaitu

$3(k + 1) + 2 < \dfrac{(k + 1)^2 + (k + 1) + 2}{2}$

$\Leftrightarrow 3k + 5 < \dfrac{(k^2 + 2k + 1) + k + 3}{2}$

$\Leftrightarrow 3k + 5 < \dfrac{k^2 + 3k + 4}{2}$

Perhatikan bahwa:

$3k + 2 < \frac{k^2+k+2}{2}$ (kedua ruas ditambah dengan 3)

$\Leftrightarrow 3k + 2 + 3 < \dfrac{k^2 + k + 2}{2} + 3$

$\Leftrightarrow 3k + 2 + 3 < \dfrac{k^2 + k + 2}{2} + \dfrac{6}{2}$

$\Leftrightarrow 3k + 2 + 3 < \dfrac{k^2 + k + 8}{2} < \dfrac{k^2 + k + 8}{2} + \dfrac{2k - 4}{2}$

$\Leftrightarrow 3k + 5 < \dfrac{k^2 + 3k + 4}{2}$

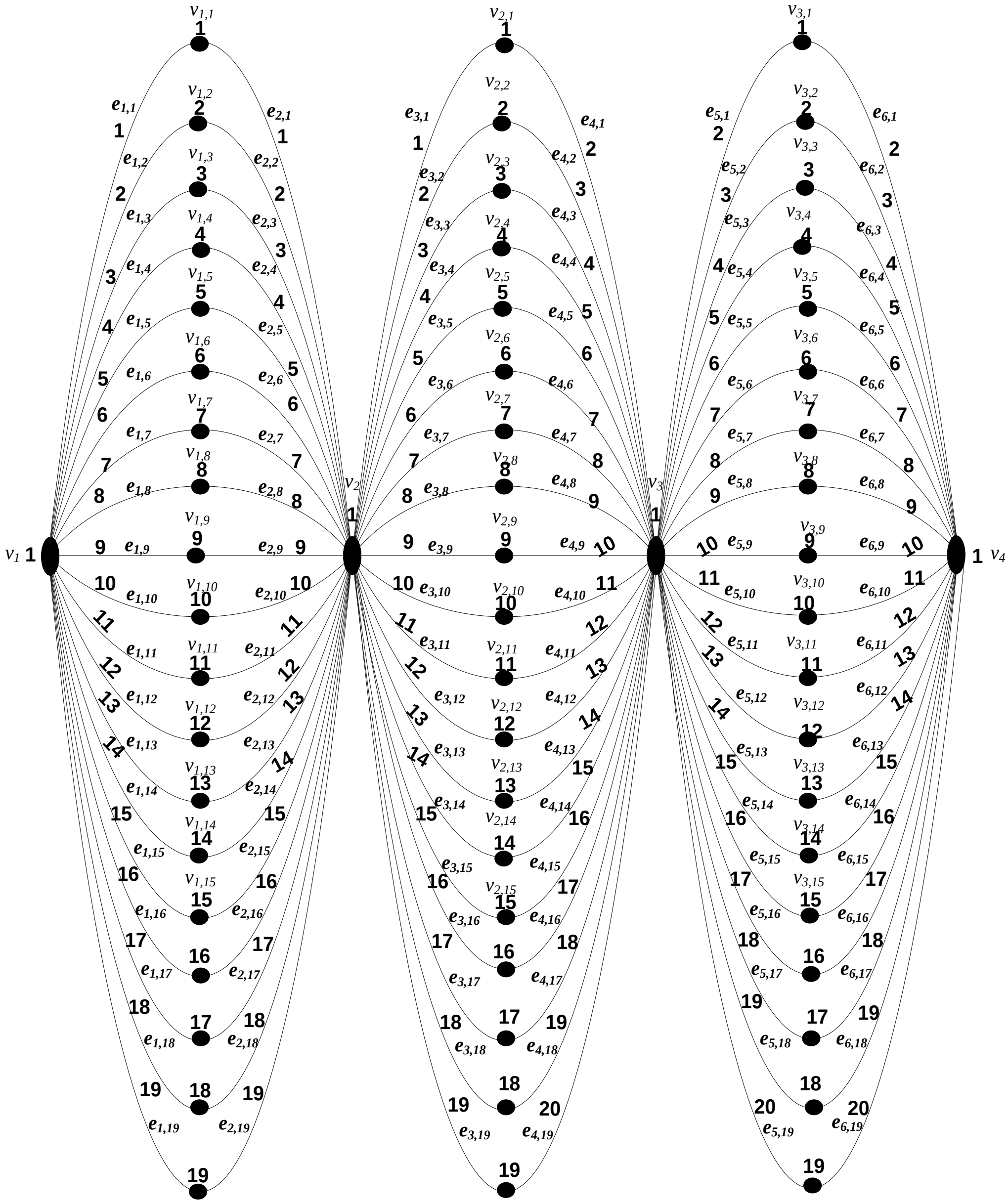
2. Akan ditunjukkan $\frac{m^2+m+2}{2} < \frac{m^2+3m+2}{2}$ untuk $m \geq 6$.
   Perhatikan bahwa, untuk $m \geq 6$
   $m < 3m$ (kedua ruas ditambah $m^2 + 2$)
   $\Leftrightarrow m^2 + m + 2 < m^2 + 3m + 2$ (kedua ruas dibagi 2)
   $\Leftrightarrow \dfrac{m^2 + m + 2}{2} < \dfrac{m^2 + 3m + 2}{2}$
3. Akan ditunjukkan $\frac{m^2+3m+2}{2} < 1 + m + m^2$ untuk $m \geq 6$.
   Perhatikan bahwa,
   $1 < m$ (kedua ruas dikali dengan m)
   $\Leftrightarrow 1 \cdot m < m \cdot m$
   $\Leftrightarrow m < m^2$ (kedua ruas ditambah $m^2 + 2m + 1$)
   $\Leftrightarrow m^2 + 3m + 1 < 2 + 2m + 2m^2$ (kedua ruas dibagi 2)
   $\Leftrightarrow \dfrac{m^2 + 3m + 1}{2} < 1 + m + m^2$
4. Akan ditunjukkan $1 + m + m^2 < 1 + 3m + m^2$ untuk $m \geq 6$.
   Perhatikan bahwa, untuk $m \geq 6$
   $m < 3m$ (kedua ruas ditambah $m^2 + 1$)
   $\Leftrightarrow 1 + m + m^2 < 1 + 3m + m^2$

Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik pada graf $sp(m, 1,3)$ memiliki bobot yang berbeda. Dapat dititikkan bahwa $tvs\big(sp(m, 1,3)\big) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 2, Juli 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Berdasarkan paparan di atas diperoleh bahwa $tvs\big(sp(m,1{,}3)\big) \geq \left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil$ dan $tvs\big(sp(m,1{,}3)\big) \leq \left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil$. Jadi terbukti bahwa $tvs\big(sp(m,1{,}3)\big) = \left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil$.

Sebagai ilustrasi dari teorema di atas, diberikan contoh pelabelan total tak teratur titik untuk graf $sp(m,1{,}3)$ untuk $m = 19$ dengan $tvs\big(sp(19{,}1{,}3)\big) = \left\lceil\frac{3(19)+2}{3}\right\rceil = 20$.



Gambar 7 Pelabelan-20 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(19{,}1{,}3)$

Perhatikan bahwa bobot titik pada graf $sp(19{,}1{,}3)$ berbeda semua. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-20 total tak teratur titik pada graf $sp(19{,}1{,}3)$. Jadi $tvs\big(sp(19{,}1{,}3)\big) = 20$.

Kesimpulan

Nilai total ketakteraturan titik pada graf $sp(m,1,3)$ untuk $m \geq 4$ adalah $tvs\left(sp(m,1,3)\right) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Daftar Pustaka

[1] Ahmad, A, Bukhary, S.H, Hasni, R, dan Slamin. Total Vertex Irregularity Strength Of Ladder Related Graphs. *Science International(Lahore)*. 26(1), 2014. 1-5.

[2] Aarthi. S. Stability of Total Vertex Irregularity Strength of Helm Graphs. *International Jurnal of Engineering Science and Computing*. 7 (8) .2017

[3] Bača, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. On Irregular Total Labellings. *Discrete Math*. 307, 2007. 1378-1388.

[4] Bondy dan Murty. *Graph Theory*. Springer. 2008.

[5] C. M. Corazon, Riyanti. R. Nilai Total Ketakteraturan Titik Pada Graf Hasil Kali Comb P_m Dan C_5 Dengan m Bilangan Ganjil. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 02 (2). 2016. 39-47.

[6] Jeyanthi. P dan A. Sudha. Total Vertex Irregularity Strength Of Some Graphs. *Palestine Journal of Mathematics*. 7(2). 2018. 725–733.

[7] Marzuki. C.C dan Lestari. M. Nilai Total Ketakteraturan Titik dari *m*-Copy Graf Lingkaran. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 4(1), 2018. 73-78.

[8] Marzuki. C.C, Susiyanti, dan Yudianti, L. Nilai Total Ketakteraturan Titik dari Graf Hasil Kali Korona P_m dan P_2. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 4 (2). 2018. 45-53.

[9] Munir, R. *Matematika Diskrit*. Revisi Kelima,. Informatika Bandung, Bandung. 2012.

[10] Nurdin, Salman, A. N. M., Gaos, N. N., dan Baskoro, E. T. On The Total Vertex Irregular Strength of a Disjoint Union of t Copies of a Path, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.* 71, 2009. 227-233.

[11] Rajasingh, I., S. Teresa Arockiamary. Total Edge Irregularity Strength Of Series Parallel Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics.* 99 (1). 2015. 11-21.

[12] Riskawati. Nilai Ketidakteraturan Pada Graf Series Paralel (Irregular Strength Of Series Parallel Graph). Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Hasanuddin: Makassar. 2017.

[13] Rismawati. Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua *Copy* Graf Bintang. *Jurnal Matematika Sains dan Teknologi.* 8 (2). 2014. 1-15.

[14] Wallis W.D., *Magic Graphs*, Boston: Birkhauser. 2001.

[15] Wibisono, S. *Matematika Diskrit*. Edisi Kedua, halaman 127-131. Graha Ilmu, Yogyakarta. 2008.