Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 2, Juli 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor

Ade Novia Rahma , Rahmawati , Ricken Husnudzan Vitho
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id , rahmawati@uin-suska.ac.id , 11754100331@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Salah satu cara sederhana dalam menentukan determinan suatu matriks menggunakan ekspansi kofaktor. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dari suatu matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 dengan mengguanakan ekspansi kofaktor. Dalam menentukan determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 tersebut, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama perhatikan bentuk pola perpangkatan matrikx segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 pangkat 1 sampai 10. Dan kemudian, membuktikan bentuk umum pola perpangkatan menggunakan metode induksi matematika. Selanjutnya perhatikan bentuk pola determinan dari matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 pangkat 1 sampai 10. Kemudian membuktikan bentuk umum determinan dengan pembuktian langsung. Hasil yang diperoleh adalah didapatnya bentuk umum determinan dari matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3.

Kata Kunci: Determinan, Matriks Segitiga Atas, Espansi kofaktor, Induksi Matematika, Perkalian Matriks

ABSTRACT

Determinants have an important role in solving several problems in the matrix and are widely used in mathematics and applied sciences. One simple way of determining the determinant of a matrix is by cofactor expansion. This study aims to determine the determinant of a specially upper triangle matrix in orde 3×3 by using cofactor expansion. In determining the determinant of a specially upper triangle matrix in orde 3×3, there are steps. First, attention the multiplikation of a specially upper triangle matrix in orde 3×3 multiplikation 1 to 10. And then, prove of the general form of multiplikation using mathematical induction methods. Furthemore, attention the determinant of a specially upper triangle matrix in orde 3×3multiplikation 1 to 10. And then, prove of the general form of determinant with direct proof. The result obtained is the determinantion of the general determinant from of a specially upper triangle matrix in orde 3×3.

Keywords: *Determinant, Upper Triangle Matrix, Cofactor Expansion, Mathematical Induction, Matriks Multiplikation*

Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapan.

Menurut Mahmud Imrona [4], matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen dibawah diagonal utama bernilai nol. Bentuk umum dari matriks segitiga atas adalah sebagai berikut.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dimana A_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-*i* dan kolim ke-*j*.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan matriks dapat menentukan Invers matriks. Jika nilai determinan matriks tidak nol, maka matriks tersebut mempunyai Invers. Namun jika nilai determinannya nol, maka matriks tidak mempunyai Invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak digunakan oleh bidang ilmu optimasi, ekonomi, dan lainnya.

Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada penelitian ini metode yang akakn digunakan adalah Metode Ekspansi Kofaktor. Pembahasan mengenai determinan matriks telah banyak dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Pada tahun 2018, Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki [1] telah melakukan penelitian yang berjudul *"Determinan Matriks Toeplitz Bentuk KhususMenggunakan Ekspansi Kofaktor"*. Selanjutnya, pada tahun 2018, Ade Novita Rahma, Kartika Swandayani, dan Corry Corazon Marzuki [2] telah melakukan penelitian dengan judul *"Determinan Matriks FLScirc$_r$ Bentuk Khusus $n\times n, n\geq 3$ Menggunakan Metode Salihu"*. Dengan menunjukkan hasilnya $|A_n| = (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n, n \geq 3$. Kemudian pada tahun 2018, Ade Novita Rahma, Elfira Safitri, dan Rahmawati [3] telah melakukan penelitian dengan judul *"Determinan Matriks FLScirc$_r$ Bentuk Khusus $n\times n, n\geq 3$ Menggunakan Metode Kondensasi Chio"*

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan pada latar belakang diatas, penulis tertarik untuk membahas mengenai determinan matriks 3×3 yang berbentuk dengan pangkat bilangan bulat positif, maka penulis tertarik untuk melakukan kajian mengenai determinan matriks segitiga atas ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan kofaktor.

Metode dan Bahan Penelitian

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penilitian ini adalah matriks segitiga atas, determinan, determinan matriks segitiga atas, serta induksi matematika.

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian ini dimulai dengan diberikan matriks segitiga atas $A_{3\times 3}$. Selanjutnya menghitung determinan (A^1) sampai determinan (A^{10}),menentukan rumus umum determinan (A^n). Berikut diberikan landasan teori atau bahan-bahan yang diperlukan dalam pembahasan.

Definisi 1. [5] sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Definisi 2. [6], dalam matriks bujur sangkar elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ disebut diagonal utama.

Definisi 3. [7] Misalkan *A* adalah matriks $m \times k$ dan *B* adalah matriks $k \times n$. Perkalian *A* dan *B*, dinotasikan dengan *AB* adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i,j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuaian dari baris ke-*i* dari *A* dan kolom ke-*j* dari *B*. Dengan kata lain, jika $AB=[c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

Definisi 4. [8] Misalkan $A_{n\times n} = [a_{ij}]$, maka minor dari a_{ij}, yang dilambangkan oleh M_{ij}, adalah determinan dari submatriks *A* yang diperoleh dengan cara membuang semua entri pada baris ke-*i* dan semua entri pada kolom ke-*j*. Sedangkan kofaktor dari a_{ij} yang dilambangkan oleh C_{ij} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Teorema 1. [5], Determinan dari matriks *A*, n×n, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

1. Ekspansi kofaktor sepanjang baris *i*:
   $$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
2. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom *j*:
   $$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Hasil dan Pembahasan

1. Bentuk umum segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif

Pembahasan berikut merupakan langkah-langkah pembentukan bentuk umum yang sesuai untuk menyelesaikan determinan dari matriks segitiga atas ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Berikut ini diberikan langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum matriks segitiga atas ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$
2. Menentukan perpangkatan matriks A^1 sampai A^{10}.

$$A^1 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A * A \\ &= \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 & 3a^2 \\ 0 & a^2 & 2a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

$$A^3 = A^2 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 & 3a^2 \\ 0 & a^2 & 2a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 & 6a^3 \\ 0 & a^3 & 3a^3 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A^4 = A^3 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 & 6a^3 \\ 0 & a^3 & 3a^3 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 & 10a^4 \\ 0 & a^4 & 4a^4 \\ 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A^5 = A^4 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 & 10a^4 \\ 0 & a^4 & 4a^4 \\ 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 & 15a^5 \\ 0 & a^5 & 5a^5 \\ 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A^6 = A^5 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 & 15a^5 \\ 0 & a^5 & 5a^5 \\ 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 & 21a^6 \\ 0 & a^6 & 6a^6 \\ 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A^7 = A^6 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 & 21a^6 \\ 0 & a^6 & 6a^6 \\ 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 & 28a^7 \\ 0 & a^7 & 7a^7 \\ 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A^8 = A^7 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 & 28a^7 \\ 0 & a^7 & 7a^7 \\ 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 & 36a^8 \\ 0 & a^8 & 8a^8 \\ 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$A^9 = A^8 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 & 36a^8 \\ 0 & a^8 & 8a^8 \\ 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^9 & 9a^9 & 45a^9 \\ 0 & a^9 & 9a^9 \\ 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A^{10} = A^9 * A$$

$$= \begin{bmatrix} a^9 & 9a^9 & 45a^9 \\ 0 & a^9 & 9a^9 \\ 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} \\ 0 & a^{10} & 10a^{10} \\ 0 & 0 & a^{10} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dengan melihat Persamaan (2) sampai (11), maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \tag{12}$$

3. Membuktikan bentuk umum A^n dengan menggunakan induksi matematika. Bentuk umum A^n pada Persamaan (12) dinyatakan dalam teorema (2) sebagai berikut:

Teorema 2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$. Maka

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Bukti : pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut :

Misalkan $P(n): A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ dibuktikan sebagai berikut :

1) Untuk n=1 maka

$$P(1): A^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^1 & \left(\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}1\right)a^1 \\ 0 & a^1 & 1a^1 \\ 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dengan melihat persamaan (2) maka *P*(1) benar.

2) Asumsikan *n=k,P(k)* benar, yaitu

$$P(k): A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^k & \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right)a^k \\ 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk *n=k*+1, *P*(*k*+1) juga benar yaitu

$$P(k+1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Pembuktian :

$A^{k+1} = A^k . A^1$

$$=\begin{bmatrix} a^k & ka^k & \left(\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)a^k \\ 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^k a & a^k a+ka^k a & a^k a+ka^k a+\left(\left(\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)a^k\right)a \\ 0 & a^k a & a^k a+ka^k a \\ 0 & 0 & a^k a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & a^{k+1}+ka^{k+1} & a^{k+1}+ka^{k+1}+\frac{1}{2}k^2a^{k+1}+\frac{1}{2}ka^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & a^{k+1}+ka^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\left(\frac{1}{2}k^2+k+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\right)\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k^2+2k+1)+\frac{1}{2}(k+1)\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k+1)^2+\frac{1}{2}(k+1)\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat persamaan (13) maka $P(k+1)$ benar.
Dari langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar. Maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

2. Bentuk umum determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif

Pembahasan berikut merupakan langkah-langkah pembentukan bentuk umum determinan dari matriks segitiga atas ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor. Berikut ini diberikan langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum determinan matriks segitiga atas ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama sebagai berikut :

1. Menentukan determinan segitiga atas bentuk khusus sesuai Persamaan (2) sampai (11) sebagai berikut :
   a. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^1

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= aa^2 \\ &= a^3 \end{aligned} \tag{14}$$

   b. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 & 3a^2 \\ 0 & a^2 & 2a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^2| &= a^2\begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} - 2a^2\begin{bmatrix} 0 & 2a^2 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} + 3a^2\begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^2a^4 \\ &= a^6 \end{aligned} \tag{15}$$

   c. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^3

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 & 6a^3 \\ 0 & a^3 & 3a^3 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^3| &= a^3\begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} - 3a^3\begin{bmatrix} 0 & 3a^3 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} + 6a^3\begin{bmatrix} 0 & a^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^3a^6 \\ &= a^9 \end{aligned} \tag{16}$$

d. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^4

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 & 10a^4 \\ 0 & a^4 & 4a^4 \\ 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^4| &= a^4\begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} - 4a^4\begin{bmatrix} 0 & 4a^4 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} + 10a^4\begin{bmatrix} 0 & a^4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^4 a^8 \\ &= a^{12} \end{aligned} \tag{17}$$

e. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^5

$$A^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 & 15a^5 \\ 0 & a^5 & 5a^5 \\ 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^5| &= a^5\begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 \\ 0 & a^5 \end{bmatrix} - 5a^5\begin{bmatrix} 0 & 5a^5 \\ 0 & a^5 \end{bmatrix} + 15a^5\begin{bmatrix} 0 & a^5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^5 a^{10} \\ &= a^{15} \end{aligned} \tag{18}$$

f. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^6

$$A^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 & 21a^6 \\ 0 & a^6 & 6a^6 \\ 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^6| &= a^6\begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 \\ 0 & a^6 \end{bmatrix} - 6a^6\begin{bmatrix} 0 & 6a^6 \\ 0 & a^6 \end{bmatrix} + 21a^6\begin{bmatrix} 0 & a^6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^6 a^{12} \\ &= a^{18} \end{aligned} \tag{19}$$

g. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^7

$$A^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 & 28a^7 \\ 0 & a^7 & 7a^7 \\ 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^7| &= a^7\begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 \\ 0 & a^7 \end{bmatrix} - 7a^7\begin{bmatrix} 0 & 7a^7 \\ 0 & a^7 \end{bmatrix} + 28a^7\begin{bmatrix} 0 & a^7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^7 a^{14} \\ &= a^{21} \end{aligned} \tag{20}$$

h. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^8

$$A^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 & 36a^8 \\ 0 & a^8 & 8a^8 \\ 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left|A^8\right| &= a^8\begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 \\ 0 & a^8 \end{bmatrix} - 8a^8\begin{bmatrix} 0 & 8a^8 \\ 0 & a^8 \end{bmatrix} + 36a^8\begin{bmatrix} 0 & a^8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^8a^{16} \\ &= a^{24} \end{aligned} \tag{21}$$

i. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^9

$$A^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 9a^9 & 45a^9 \\ 0 & a^9 & 9a^9 \\ 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left|A^9\right| &= a^9\begin{bmatrix} a^9 & 9a^9 \\ 0 & a^2 9 \end{bmatrix} - 9a^9\begin{bmatrix} 0 & 9a^9 \\ 0 & a^9 \end{bmatrix} + 45a^9\begin{bmatrix} 0 & a^9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^9a^{18} \\ &= a^{27} \end{aligned} \tag{22}$$

j. Determinan matriks segitiga atas untuk matriks A^{10}

$$A^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} \\ 0 & a^{10} & 10a^{10} \\ 0 & 0 & a^{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left|A^{10}\right| &= a^{10}\begin{bmatrix} a^{10} & 10a^{10} \\ 0 & a^{10} \end{bmatrix} - 10a^{10}\begin{bmatrix} 0 & 10a^{10} \\ 0 & a^{10} \end{bmatrix} + 55a^{10}\begin{bmatrix} 0 & a^{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a^{10}a^{20} \\ &= a^{30} \end{aligned} \tag{23}$$

Dengan melihat Persamaan (14) sampai (23) maka dapat diduga bentuk umum determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan positif yaitu :

$$\left|A^n\right| = a^{3n} \tag{24}$$

2. Membuktikan bentuk umum determinan dengan pembuktian langsung. Bentuk umum $\left|A^n\right|$ pada persamaan (24) dinyatakan dalam teorema (3) sebagai berikut :

Teorema 3. Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$. Maka $\left|A^n\right| = a^{3n}$

Bukti :

Akan dibuktikan $\left|A^n\right| = a^{3n}$ sebagai berikut :

Berdasarkan teorema (2) maka didapatkan bentuk umum untuk n yaitu :

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bentuk umum A^n maka akan dibuktikan bentuk umum determinan dengan pembuktian langsung sebagai berikut :

$$\left|A^n\right| = a^n \begin{bmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{bmatrix} - na^n \begin{bmatrix} 0 & na^n \\ 0 & a^n \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \begin{bmatrix} 0 & a^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a^n a^{2n}$$

$$= a^{3n}$$

Sehingga terbukti $\left|A^n\right| = a^{3n}$.

Contoh 1. Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai matriks dari A^3 dan $\left|A^3\right|$

Penyelesaian :

Diketahui n=3 dan a=4. Pada teorema (2) sudah didapat bentuk umum matriks A^n, maka bentuk matriksnya adalah :

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4^3 & 3*4^3 & \left(\frac{1}{2}3^2 + \frac{1}{2}3\right)4^3 \\ 0 & 4^3 & 3*4^3 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 3*64 & \left(\frac{1}{2}9 + \frac{1}{2}3\right)64 \\ 0 & 64 & 3*64 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 64 & 192 & \left(\frac{12}{2}\right)64 \\ 0 & 64 & 192 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 64 & 192 & 384 \\ 0 & 64 & 192 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

Untuk nilai determinannya adalah :

$$\left|A^n\right| = a^{3n}$$

$$= 4^{3*3}$$

$$= 4^9$$

$$= 262.144$$

Maka hasil $\left|A^n\right|$ adalah 262.144

Kesimpulan

Bentuk umum dari determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 seperti Persamaan (2) adalah :

$$\left|A^n\right| = a^{3n}.$$

DaftarPustaka

[1] Aryani, Fitri., dan Marzuki, Corry Corazon., *Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor*, Jurnal Sains Matmatika dan Statistika,2018.
[2] Rahma, Ade Novia., Swandayani, Kartika., dan Marzuki, Corry Corazon., *Determinan Matriks FLScirc$_r$ Bentuk Khusus n×n,n≥3 Menggunakan Metode Salihu,* Jurnal Fourier,2019 .
[3] Rahma, Ade Novia., Safitri, Elfira., dan Rahmawati., *Determinan Matriks FLScirc$_r$ Bentuk Khusus n×n,n≥3 Menggunakan Metode Kondensasi Chio,* Jurnal Sains Matmatika dan Statistika,2019.
[4] I. Mahmud., *Aljabar Linear,* Erlangga, Jakarta, 2009.
[5] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., *Dasar-Dasar Aljabar Linier Versi Aplikasi,* Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.
[6] Anton, Howard., *Aljabar Linier Elementer,* Edisi Keenam, Erlangga, Jakarta, 1991.
[7] K. H. Rosen., *Discrete Mathematics and Its Application*, Sevent Ed, McGraw-Hill, Singapore, 2007.
[8] Imrona, Mahmud., *Aljabar Linear Dasar,* Edisi Kedua, Erlangga, Bandung, 2012.