Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Choirul Anam[2], Corry Corazon Marzuki[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, choirulpamungkas@gmail.com,
corry@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Bentuk umum *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada diagonal utama pada matriks tersebut, Artinya diperoleh terlebih dahulu bentuk umum perpangkatan matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Pembuktian menggunakan induksi matematika dan definisi *trace* matriks. Diperoleh dua bentuk umum yaitu perpangkatan matriks dan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat dari amtriks yang diberikan. Aplikasi bentuk unum perpangkatan matriks kompleks dan *trace* matriks kompleks dalam bentuk contoh soal.

Kata kunci: *induksi matematika, matriks kompleks, trace.*

ABSTRACT

This study aims to obtain the general form of trace of integer power of complex 3 x 3 special matrix. The general form of trace of integer power of complex 3 x 3 special matrix is obtained by adding up the entires on the main diagonal of matrix. This means that it is obtained in advanced the general form of integer power of complex 3 x 3 special matrix. Proof using mathematical induction and trace matrix definitions. Obtained two general forms, namely matriks elevation and trace of integer power of matrix from the given matrix. The applications of the general form of trace of integer power of complex 3 x 3 special matrix in the form of sample problems.

Keywords: *mathematical induction, complex matrix, trace.*

Pendahuluan

Matriks tidak hanya berisi dengan entri-entri bilangan real, namun entri-entri dari sebuah matriks juga dapat diisi dengan bilangan kompleks. Matriks yang berisi entri-entri bilangan kompleks dikatakan matriks kompleks (Hengki, dkk. 2015). Pada [9] dibahas mengenai *trace* matriks berpangkat dan mendapatkan dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif 2 x 2, sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad , \quad n \text{ genap} \quad (1)$$

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n \quad \text{ganjil} \quad (2)$$

Selanjutnya [3] telah mendapatkan bentuk umum dari *traece* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif 2 x 2, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(det(A)\right)^n} \quad , \quad n \text{ genap}$$
(3)

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(det(A)\right)^n} \quad , \quad n \text{ ganjil}$$
(4)

Kedua penelitian tersebut menggunakan matriks real dengan bentuk sebagai berikut:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ \forall\, a,b,c,d \in R$$
(5)

Penelitian serupa juga dapat dilihat pada [2]. Di dalam artikel tersebut membahas tentang *trace* matriks berpangkat dan mendapatkan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \ untuk\ n\ ganjil \\ 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & , \ untuk\ n\ genap \end{cases}$$
(6)

Pada [4] mendapatkan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & , \ untuk\ n\ ganjil \\ \frac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & , \ untuk\ n\ genap \end{cases}$$
(7)

Kedua penelitian tersebut menggunakan matriks dengan bentuk sebagai berikut:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall\, a,b \in R$$
(8)

Penelitian [5] telah melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat dan mendapatkan bentuk umum *trace* matriks toeplitz kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \ untuk\ n\ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}+1}(a+bi)^n, & untuk\ n\ genap \end{cases}$$
(9)

Penelitian tersebut menggunakan matriks dengan bentuk sebagai berikut:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix}, \ \forall\, a,b \in R, i = imajiner$$
(10)

Berdasarkan hasil yang telah dibahas dari beberapa penelitian di atas, dapat ditentukan bentuk umum *trace* matriks berpangkat dari bentuk matriks seperti Persamaan (5), (8), dan (10). Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat dengan entri real maupun kompleks tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit, cukup dengan mensubsitusikan nilai entri-entri yang ada pada matriks ke bentuk umum. Pada artikel ini penulis akan menentukan bentuk umum perpangkatan matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat dan bentuk umum *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Adapun bentuk matriks yang penulis sajikan adalah sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \quad \forall\, a,b \in R, i = imajiner$$
(11)

Matriks bentuk khusus Persamaan (11) yang digunakan pada penelitian ini cukup menarik dari matriks bentuk khusus pada Persamaan (10), karena kolom kedua dari entri matriksnya merupakan konjuget dari kolom pertama dan ketiga,

Metode dan Bahan Penelitian

Berikut diberikan landasan teori yang diperlukan dalam penelitian kali ini.

Definisi 1 [1] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AAA \dots A}_{n\,faktor}\,(n > 0)$$
(12)

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor}$$
(13)

Teorema 1 [7] Misalkan$A = \{a_{ij}\}$ suatu matriks persegi berukuran $n\ x\ n$, maka *trace*dari$A$ didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan dengan $tr(A)$, yaitu $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Beberapa sifat dari *trace* matriks diantaranya adalah sebagai berikut:

1. $tr(I_n) = n$
2. $tr(kA) = k\ tr(A)$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(A^T) = tr(A)$

di mana k adalah sembarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran $n\ x\ n$.

Definisi 2 [6] Himpunan bilangan kompleks berbentuk $z = a + bi$ atau $z = a + ib$, dengan $a, b \in R$ dan $i^2 = -1$.

Jika $z = a + bi$ merupakan suatu bilangan kompleks, maka a dinamakan bagian riil dari z dan b dinamakan bagian imaginer dari z, dan dapat disimbolkan dengan $R(z)$ dan $I(z)$. Lambang z yang dapat ditempatkan untuk sesuatu dari himpunan bilangan kompleks dinamakan peubah kompleks. Himpunan bilangan riil sebagai bagian dari himpunan bilangan kompleks dengan $b = 0$. Jika $a = 0$, maka bilangan kompleks $0 + bi$ atau bi dinamakan bilangan imaginer sejati.

Definisi 3 [6] Jika $z = a + bi$, maka bilangan kompleks sekawan dari z yang didefinisikan $\bar{z} = a - bi$.

Untuk sembarang bilangan kompleks $z = a + bi$, modulus dari bilangan kompleks yang merupakan panjang vektor z di definisikan sebagai berikut:

Definisi 4 [6] Jika bilangan kompleks $z = a + bi$, maka modulus dari z ditulis $|z|$ didefinisikan sebagai $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan $z = (a, b)$, dalam koordinat polar, bilangan kompleks $z = (a, b)$ dinyatakan dalam r dan θ yaitu $z = (r, \theta)$. Adapun hubungan antara keduanya, (a, b) dan (r, θ) adalah:

$a = r\cos\theta$, $= r\sin\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ dengan $\theta = arc\tan\frac{b}{a}$.

Untuk $z \neq 0$ dan θ dalam satuan derajat, sudut θ dihitung dari $\tan\theta = \frac{b}{a}$ dan untuk $z = 0$ maka $r = 0$ dan θ dapat dipilih sebarang. Dengan demikian bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{14}$$

Dari rumus Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{15}$$

maka dengan melihat Persamaan (14) dan Persamaan (15) bentuk polar bilangan kompleks z dapat diubah menjadi

$$z = re^{i\theta} \tag{16}$$

untuk setiap $\theta_1, \theta_2 \in R$, maka

$$e^{i(\theta_1)}e^{i(\theta_2)} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{17}$$

Berdasarkan Persamaan (15) dan Persamaan (17), maka didapatkan persamaan

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{18}$$

Jika diketahui:

$$\begin{gathered} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ \vdots \\ z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \end{gathered}$$

Maka secara induksi matematika, diperoleh rumus perkalian $z_1z_2 \dots z_n = r_1r_2 \dots r_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$.

Akibatnya jika, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \ . \tag{19}$$

Khusus untuk $r = 1$, Persamaan (19) disebut *Dalil De-Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{20}$$

untuk setiap $n \in N$.

Induksi matematika merupakan salah satu cara dalam membuktikan sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli. Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Melalui induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Definisi 5 [8] Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal perihal bilangan bulat positif, maka untuk membuktikan $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n adalah dengan menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika$p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Hasil dan Pembahasan

Pembahasan dibagi dua bagian, pertama mengenai perpangkatan matriks kompleks berbentuk khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat dan kedua *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3 x 3 berpangkat bilangan bulat

1. Perpangkatan matriks kompleks berbentuk khusus3×3

Berikut diberikan langkah-langkah yang sesuai metodologi penelitian untuk menentukan bentuk umum perpangkatan matriks kompleks 3×3 berbentuk khusus pada Persamaan (11) berpangkat bilangan bulat sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$, $\forall\, a, b \in R$ dan $i = imajiner$.
2. Menentukan perpangkatan matriks kompleks A_3^2 sampai A_3^{10}, yang disajikan sebagai berikut:

$$A_3^2 = A.A \quad = (3a+bi).\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi).A$$
(21)

$$A_3^3 = A^2.A \ = (3a+bi)^2.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^2.A$$
(22)

$$A_3^4 = A^3.A = (3a+bi)^3.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^3.A$$
(23)

$$A_3^5 = A^4.A = (3a+bi)^4.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^4.A$$
(24)

$$A_3^6 = A^5.A = (3a+bi)^5.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^5.A$$
(25)

$$A_3^7 = A^6.A \ = (3a+bi)^6.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^6.A$$
(26)

$$A_3^8 = A^7.A \ = (3a+bi)^7.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^7.A$$
(27)

$$A_3^9 = A^8.A \ = (3a+bi)^8.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^8.A$$
(28)

$$A_3^{10} = A^9.A \ = (3a+bi)^9.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^9.A$$
(29)

3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks(A_3^n).

Dengan mengamati kembali Persamaan (21) sampai dengan (29) maka dapat diduga bentuk umum dari perpangkatan matriks (A_3^n), yaitu:

$$A_3^n = (3a+bi)^{n-1}.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} = (3a+bi)^{n-1}.A \ .$$
(30)

Selanjutnya akan dibuktikan dugaan bentuk umum perpangkatan matriks kompleks 3×3 berbentuk khusus pada Persamaan (11) yang disajikan dalam Teorema 2 sebagai berikut:

Teorema 2 Diberikan matriks dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \forall\, a,b \in R$ dan $i =$ imajiner, maka$A_3^n = (3a+bi)^{n-1}.A_3$, untuk $n \in Z^+$.

Bukti:

Dengan menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bentuk umum dari perpangkatan matriks (A_3^n).

1. Akan ditunjukan untuk $n = 1$, $p(1)$ benar, yaitu:

$$\begin{aligned} p(1): A_3^1 \ &= (3a+bi)^0.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \\ &= A_3 \end{aligned}$$

dengan memperhatikan Persamaan (11) maka $p(1)$benar.

2. Langkah induksi:

Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar yaitu,

$p(k)$: $A_3^k = (3a+bi)^{k-1}.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$, untuk$k \in Z^+$.

Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar yaitu:

$$\begin{aligned} p(k+1): A_3^{k+1} &= (3a+bi)^k.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \text{ untuk } k \in Z^+. \\ &= (3a+bi)^k.A_3 \text{ , dengan } k \in Z^+.. \end{aligned}$$
(31)

Pembuktian dimulai dari,

$$A_3^{k+1} = A_3^k . A_3$$
$$= (3a+bi)^{k-1} . \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$$
$$= (3a+bi)^{k-1} . \begin{bmatrix} (a+bi)(3a+bi) & (a-bi)(3a+bi) & (a+bi)(3a+bi) \\ (a+bi)(3a+bi) & (a-bi)(3a+bi) & (a+bi)(3a+bi) \\ (a+bi)(3a+bi) & (a-bi)(3a+bi) & (a+bi)(3a+bi) \end{bmatrix}$$
$$= (3a+bi)^{k-1} . (3a+bi) . \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$$
$$= (3a+bi)^{k} . \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$$
$$= (3a+bi)^k . A_3$$

Dengan memperhatikan Persamaan (31), maka$p(k+1)$ juga benar. Oleh karena Langkah (1) dan Langkah (2) sudah diperlihatkan benar, maka Teorema 2 terbukti. ■

2. *Trace* Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Bentuk umum *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dapat ditentukan dengan memperhatikan Teorema 2, yang disajikan dalam Teorema 3 sebagai berikut:

Teorema 3 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R$ dan $i =$ imajiner, maka $tr(A_3^n) = (3a+bi)^n$, untuk $n \in Z^+$.

Bukti:

Teorema 3 tersebut akan dibuktikan dengan pembuktian langsung sebagai berikut:
Berdasarkan Teorema 2 maka $tr(A_3^n)$ adalah:

$$tr(A_3^n) = tr\left((3a+bi)^{n-1} . \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \right)$$
$$= (3a+bi)^{n-1} . tr\left(\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix} \right)$$
$$= (3a+bi)^{n-1} . (a+bi+a-bi+a+bi)$$
$$= (3a+bi)^{n-1} . (3a+bi)$$
$$= (3a+bi)^n .$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 3 terbukti. ■

Matriks yang dapat dibalik atau matriks memiliki invers jika nilai determinan matriks tidak sama dengan nol. Determinan matriks kompleks berbentuk khusus pada Persamaan (11) dinyatakan sebagai berikut:

$$\det(A_3) = \det\left(\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}\right) = 0\,.$$

Dengan melihat nilai $\det(A_3)$ maka matriks kompleks berbentuk khusus pada Persamaan (11) tidak memiliki invers, akibatnya *trace* matriks kompleks bentuk khusus pada Persamaan (11) berpangkat bilangan bulat negatif tidak ada.

Berikut contoh yang berhubungan dengan Teorema 2 dan Teorema 3

Contoh 1 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$, akan ditentukan $(A_3^{13}), (A_3^{16})$.

a. Untuk (A_3^{13}) dengan menggunakan Teorema 2, yaitu:

$$A_3^{13} = (3(1)+2i)^{13-1}.\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$
$$= (3+2i)^{12}.\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselesaikan bentuk $(3+2i)^{12}$ menggunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks.

Terlebih dahulu ditentukan$(r\,,\theta)$ sebagai berikut:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = 3{,}605551275 \approx 3{,}60$$
$$\theta = arc\tan\frac{2}{3} = 33{,}69006752598^o \approx 33{,}69^o$$

Maka diperoleh,

$$(3+2i)^{12} = r^{12}(\cos(12\theta) + i\sin(12\theta)) \;= 341.163{,}46 + 3.316.866{,}94\, i$$

sehingga

$$A_3^{13} = (3+2i)^{12}.\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$
$$= (341.163{,}46 + 3.316.866{,}94\, i).\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$

b. Untuk A_3^{16} dengan menggunakan Teorema 2, yaitu:

$$A_3^{16} = (3(1)+2i)^{15}.\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$
$$= (3+2i)^{15}.\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 1-2i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselesaikan bentuk $(3+2i)^{15}$ menggunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks.

Terlebih dahulu ditentukan $(r\,,\theta)$ sebagai berikut:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = 3{,}605551275 \approx 3{,}60$$
$$\theta = arc\tan\frac{2}{3} = 33{,}69006752598 \approx 33{,}69^o$$

Maka diperoleh,

$$(3+2i)^{15} = r^{15}(\cos(15\theta) + i\sin(15\theta)) \;= 126.012.134 + 181.280.614\, i$$

sehingga

$$A_3^{13} = (3+2i)^{12}.\begin{bmatrix}1+2i & 1-2i & 1+2i\\ 1+2i & 1-2i & 1+2i\\ 1+2i & 1-2i & 1+2i\end{bmatrix}$$
$$= (126.012.134 + 181.280.614\, i\,).\begin{bmatrix}1+2i & 1-2i & 1+2i\\ 1+2i & 1-2i & 1+2i\\ 1+2i & 1-2i & 1+2i\end{bmatrix}$$

Contoh 2 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\end{bmatrix}$, akan ditentukan (A_3^{116}).

Dengan menggunakan Teorema 2, maka diperoleh:

$$A_3^{116} = \left(3\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)+i\right)^{116-1}.\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\end{bmatrix}$$
$$= \left(\sqrt{3}+i\right)^{115}.\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselesaikan bentuk $\left(\sqrt{3}+i\right)^{115}$ menggunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks.

Terlebih dahulu ditentukan $(r\,,\theta)$ sebagai berikut:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 3{,}16227766 \approx 3{,}16$$
$$\theta = arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^o$$

Maka diperoleh,

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{115} = r^{115}(\cos(115.\theta) + i\sin(115.\theta)) = (\,2{,}52 + 1{,}45\,i\,) \times 10^{57}$$

sehingga

$$A_3^{116} = (3+2i)^{115}.\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\end{bmatrix}$$
$$= ((\,2{,}52 + 1{,}45\,i\,) \times 10^{57}).\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}+i & \frac{1}{3}\sqrt{3}-i & \frac{1}{3}\sqrt{3}+i\end{bmatrix}$$

Contoh 3 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}ii \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}i & \frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}i \end{bmatrix}$ akan ditentukan $tr(A_3^{20})$ Dengan menggunakan Teorema 3, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A_3^{20}) &= \left(3\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\,i\right)^{20} \\ &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^{20} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan diselesaikan bentuk $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^{20}$menggunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks.
Terlebih dahulu ditentukan $(r\,,\theta)$ sebagai berikut:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$$

$$\theta = arc\tan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 45^o$$

Maka diperoleh,

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^{20} = r^{20}(\cos(20\theta)+i\sin(20\theta)) = 1.048.576\ (-1+0\ i) = -1.048.576$$

sehingga

$$tr(A_3^{20}) = -1.048.576\ .$$

Contoh 4. Diberikan sebuah matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 9i & -9i & 9i \\ 9i & -9i & 9i \\ 9i & -9i & 9i \end{bmatrix}$ akan ditentukan $tr(A_3^{50})$.

Dengan menggunakan Teorema 3.

$$\begin{aligned} tr(A_3^{50}) &= (3(0)+9\ i)^{50} \\ &= (9\ i)^{50} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan diselesaikan bentuk $(9\ i)^{50}$ menggunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks.
Terlebih dahulu ditentukan $(r\,,\theta)$ sebagai berikut:

$$r = \sqrt{(0)^2+(9)^2} = 9$$

$$\theta = arc\tan\frac{9}{0} = 90^o$$

maka diperoleh,

$$\begin{aligned} (9\ i)^{50} &= r^{50}(\cos(50\theta)+i\sin(50\theta)) = (5{,}15\times 10^{47})\ (-1+0\ i) \\ &= -(5{,}15\times 10^{47}) \end{aligned}$$

artinya

$$tr(A_3^{50}) = (3(0)+9\ i)^{50} = -(5{,}15\times 10^{47})$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat yang dipaparkan dalam hasil dan pembahasan dengan matriks A_3 berbentuk sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \qquad \forall\, a, b \in R \text{ dan } i = \text{imajiner},$$

Maka diperoleh:

1. Bentuk umum matriks kompleks A_3berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:
$$A_3^n = (3a+bi)^{n-1}.\begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}$$
$$= (3a+bi)^{n-1}.A_3 \text{ , untuk } n \geq 1.$$
2. Bentuk umum *trace* matriksA_3^n dengan n bilangan bulat positif sebagai berikut:
$$tr(A_3^n) = (3a+bi)^n.$$
3. Matriks kompleks A_3 berpangkat bilangan bulat negative tidak dapat ditentukan sebab matriks kompleks A_3 tidak memiliki invers.

Daftar Pustaka

[1] Anton H dan C. Rorres .*Elementary Linear Algebra Application Version,* 11^{th} Ed., John Wiley & Sons, New York, 2013.

[2] Aryani, F, dan Titik Fatonah, M. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Prosiding Semirata Medan*, 2018.

[3] Aryani F dan M. Solihin . “Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif” ,*Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2017; Vol.3 (2).

[4] Aryani F dan Yulianis. “Trace Berbentuk Khusus2×2 Berpangkat Bilangan BulatNegatif”, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2018.

[5] Aryani F, dkk. “Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif “, *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10),* 2018.

[6] Churchill, R. V dan James W. Brown., ”*Complex Variables and Application”,* Eighth Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 2009.

[7] Gentle J. E., “*Matrix Algebra”,* Springer, New York, 2007.

[8] Munir R, “*Matematika Diskrit”,* EdisiKetiga., Bandung, 2005.

[9] Pahade J dan Manoj J., “Trace of positif integer power of real 2×2 Matrices”, *Advance in Linear Algebra & Matrix Theory*, 5, 150-155, 2015.