

Penerapan Metode *Multiple Scales* untuk Masalah *Galloping* pada Dua Spans Kabel Transmisi

Eristia Arfi¹

¹Prodi Matematika terapan
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim II Riau
Jalan HR. Soebrantas km 15 No. 155 Panam Pekanbaru Riau
e-mail: eristiaarfi1811@gmail.com

Abstrak

Pada paper ini, dilakukan penurunan model *galloping* dengan menggunakan Hukum Hooke dan Hukum Newton. Selanjutnya model *galloping* direduksi sehingga diperoleh persamaan integral-diferensial. Analisis respon sistem diamati dengan asumsi frekuensi gaya luar sangat dekat dengan frekuensi natural sistem. Ekspansi solusi analitik orde kedua untuk masalah tak stasioner dari persamaan integral-diferensial ditentukan dengan menggunakan metode *multiple scales*. Analisa perilaku sistem terhadap titik kestabilan serta dinamik dari solusi yang bergantung pada parameter menunjukkan bahwa kondisi awal sistem mempengaruhi perilaku osilasi dari kabel.

Kata kunci: *galloping*, *multiple scales*, *perturbasi*, *resonansi*.

Abstract

In this paper, *galloping* model is derived by using of Hooke's Law and Newton's Law. Furthermore *galloping* model is reduced in order to obtain a set of integro-differential equations. Analysis of system response observed with the assumption that the frequency of the external force is very close to the natural frequency of the system. Second-order expansion of analytic solutions for stationary problem from integro-differential equations are determined using the method of *multiple scales*. Analysis of the behavior of the system to stability point and dynamic of solutions that depend on the parameter indicates that the initial conditions of the system affect the oscillation behavior of cable.

Keywords: *galloping*, *multiple scales*, *perturbation*, *resonance*.

1. Pendahuluan

Listrik merupakan salah satu komoditi strategis dalam perekonomian Indonesia, karena selain digunakan secara luas oleh masyarakat untuk penerangan, listrik juga merupakan salah satu sumber energi utama bagi sektor industri. Di dalam penyediaan tenaga listrik, dapat dibagi menjadi tiga proses, yaitu pembangkitan, transmisi dan distribusi.

Pada suatu sistem tenaga listrik, energi listrik dibangkitkan dari pusat pembangkit listrik kemudian ditransmisikan ke pusat-pusat pengatur beban melalui saluran transmisi. Berdasarkan pemasangannya, saluran transmisi dibagi menjadi dua kategori, yaitu saluran transmisi udara (*overhead lines*) dan saluran kabel tanah (*underground cable*). Saluran transmisi udara merupakan saluran transmisi yang menyalurkan energi listrik melalui kawat-kawat yang digantung pada isolator antar menara atau tiang transmisi. Keuntungan dari saluran transmisi udara ini adalah lebih murah, mudah dalam perawatan, mudah dalam mengetahui letak gangguan, mudah dalam perbaikan dan lainnya. Namun saluran transmisi udara juga memiliki kelemahan antara lain karena berada di ruang terbuka maka cuaca dan kondisi alam sangat berpengaruh terhadap keandalannya. Sebagai contoh, kombinasi dari angin dan hujan dapat menghasilkan gaya yang bisa mengakibatkan kawat atau kabel berosilasi dengan amplitudo yang besar atau dikenal juga dengan istilah *galloping*. Berdasarkan dari gaya luar yang terjadi pada kawat, hal ini bisa dikategorikan pada ketidakstabilan *aero-elastisitas* (*aero-elastic instability*).

Kekuatan angin yang cukup kecil dapat mempertahankan getaran pada *galloping*. Oleh karena itu, *galloping* sangat dekat dengan getaran bebas (*free vibration*)[1]. Karena amplitudo yang besar ini, *galloping* dapat mengakibatkan gangguan bahkan kerusakan pada saluran

transmisi yang bisa menghambat pendistribusian listrik ke konsumen. Secara tidak langsung hal ini tentu saja berdampak pada kegiatan perekonomian.

Pada paper ini, akan diterapkan metode *multiple scales* pada masalah *galloping* yang terjadi pada dua *spans* kabel transmisi. Metode *multiple scales* merupakan salah satu teknik perturbasi yang digunakan untuk menentukan aproksimasi solusi analitik dari masalah perturbasi [2]. Ide dari metode *multiple scales* ini adalah menentukan ekspansi yang merepresentasikan respon dari sistem menjadi suatu fungsi yang terdiri dari beberapa variabel bebas atau skala [3].

2. Galloping

2.1 Model Matematika Galloping

Notasi S menyatakan *span* yang merupakan jarak antara kedua menara tempat ujung-ujung kabel yang terikat, D menyatakan lendutan maksimum kabel yang terjadi pada kondisi stasioner kabel dan L adalah panjang kabel. Kabel diasumsikan elastis linear dengan kekakuan lentur yang dapat diabaikan. Kabel memiliki luas penampang yang seragam yaitu A , massa per satuan panjang m serta *Modulus Young* E . Sumbu horizontal dinyatakan oleh x dan sumbu vertikal dinyatakan oleh y . Untuk dapat mengetahui kondisi di tiap-tiap posisi sepanjang kabel, maka digunakan variabel l dengan $l \in [0, L]$ kemudian variabel t untuk menyatakan waktu.

Pada paper ini hanya akan menganalisa gerak kabel pada arah vertikal, oleh karena itu vektor gravitasi akan diperhitungkan dalam menganalisa gerak kabel. Dengan menggunakan sistem koordinat kartesius, vektor gravitasi $-ge_y$ mengarah pada sumbu y negatif. Dalam sistem ini juga terdapat gaya luar periodik yang bergantung terhadap l dengan amplitudo $\mathcal{P}(l)$ yang bekerja pada kabel dan mengarah pada sumbu y dimana ω_f merupakan frekuensi dari gaya luar yang cukup dekat dengan frekuensi natural dari sistem. Gaya luar ini dinotasikan dengan gaya per satuan massa $\mathcal{P}(l) \sin \omega_f t$.

Dengan menerapkan Hukum Hooke dan Hukum Newton, serta modifikasi diperoleh model matematika *galloping*

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{T}{1 + \frac{T}{EA}} \frac{\partial X}{\partial l} \right) = \frac{m \partial^2 X}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{T}{1 + \frac{T}{EA}} \frac{\partial Y}{\partial l} \right) = \frac{m \partial^2 Y}{\partial t^2} = mg - m \mathcal{P}(l) \sin(\omega_f t) \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial l} \right)^2 = \left(1 + \frac{T}{EA} \right)^2 \quad (3)$$

2.2 Kondisi-kondisi batas

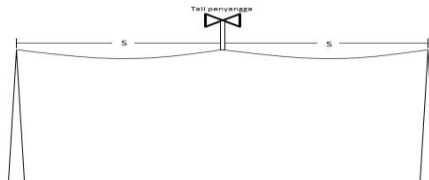
Terdapat beberapa cara untuk menyusun suatu sistem kabel terikat. Pada prinsipnya masing-masing ujung kabel diikat di menara, kemudian kabel dibagi menjadi N buah *span* oleh $N - 1$ penyangga dimana berat penyangga tersebut dapat diabaikan.

Pada sistem satu kabel, masing-masing ujung kabel terikat di menara. Kondisi di kedua ujung kabel yang terikat pada saat $l = 0$ dan $l = L$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$X(0, t) = 0, Y(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$X(L, t) = S, Y(L, t) = 0. \quad (5)$$

Pada paper ini akan dibahas sistem dua kabel $N = 2$.



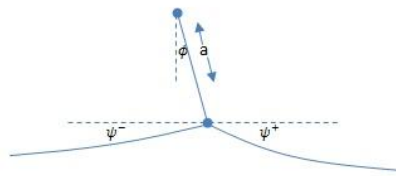
Gambar 1. Ilustrasi Sistem Dua Kabel

Untuk sistem dua kabel, kabel akan dibagi menjadi dua bagian *span* oleh sebuah penyangga. Posisi ujung-ujung kabel yang terikat adalah $l = 0$ dan $l = 2S$. Kemudian dapat dituliskan

$$X(0, t) = 0, Y(0, t) = 0, \quad (6)$$

$$X(2L, t) = 2S, Y(L, t) = 0. \quad (7)$$

Perhatikan posisi $l = L$ dimana kabel diikat pada suatu tali penyangga.



Gambar 2. Ilustrasi Kabel yang Digantungkan pada Tali Penyangga

Gerakan tali penyangga terbatas pada gerak melingkar, dimana komponen gaya yang tegak lurus terhadap kabel kontinu. Hal ini dinotasikan dalam kondisi *couple* sebagai berikut:

$$\mathbf{X}(L^+, t) - \mathbf{X}(L^-, t) = 0 \quad (8)$$

$$(X - S)^2 + Y^2 = a^2 \quad (9)$$

$$[T \cos(\phi - \psi)]_{l=L^\pm} = 0 \quad (10)$$

dengan $l = L^\pm$ menyatakan limit dari masing-masing sisi tali penyangga.

2.3 Model Reduksi

Penskalaan dilakukan untuk memperoleh parameter yang akan digunakan dalam membuat model reduksi. Parameter yang digunakan adalah perbandingan antara lendutan D dengan panjang kabel L sehingga menghasilkan nilai yang kecil yaitu

$$\epsilon = \frac{D}{L} \ll 1. \quad (11)$$

Perpindahan vertikal dalam arah y dibandingkan dengan panjang kabel cukup kecil, sehingga

$$\frac{Y}{L} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (12)$$

Panjang gelombang transversal λ_T memiliki nilai yang hampir sama dengan panjang kabel

$$\frac{\lambda_T}{L} = \mathcal{O}(1). \quad (13)$$

Kabel cenderung kaku oleh karena itu nilai kekakuan relatif $\frac{EA}{mgL}$ besar sehingga menyebabkan panjang gelombang longitudinal bernilai besar dibanding dengan panjang kabel

$$\frac{L}{\lambda_L} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (14)$$

Parameter ϵ akan digunakan untuk mereduksi model matematika (1-3) menjadi model reduksi. Sebelum mereduksi model, akan dilakukan analisis dimensional sehingga membuat model reduksi memuat variabel-variabel tak berdimensi. Untuk kemudahan penulisan selanjutnya variabel tak berdimensi ditandai dengan superscript $*$. Kecepatan gelombang longitudinal adalah $c_L = \left(\frac{EA}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ dimana $\frac{L}{\lambda_L} = \omega \frac{L}{c_L} = \mathcal{O}(\epsilon)$, sehingga diperoleh frekuensi referensi

$\frac{\epsilon \left(\frac{EA}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}{L}$. Frekuensi dan variabel waktu tak berdimensi dinyatakan oleh

$$\omega = \omega_{ref} \omega^*, \quad t = \frac{t^*}{\omega_{ref}}.$$

Selanjutnya dilakukan penskalaan pada *span* dimana panjang busur l pada panjang kabel L . Sehingga dapat didefinisikan $s \in [0,1]$. Karena $\frac{Y}{L} = \mathcal{O}(\epsilon)$, maka Y adalah skala pada ϵL .

Dengan ini, diperoleh persamaan dengan variabel-variabel tak berdimensi,

$$l = sL, Y(l, t) = \epsilon L Y^*(s, t^*), T(l, t) = T_{ref} T^*(s, t^*). \quad (15)$$

Jika hasil penskalaan disubstitusikan ke model *galloping* (1-3), maka akan dihasilkan model reduksi, dan dengan menghilangkan bintang diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial Y}{\partial s} \right) - 8 \mu + \alpha P(s) \sin(\Omega t), \quad (17)$$

$$T = \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2, \quad (18)$$

dengan parameter

$$\mu = \frac{mgL}{8EA} \epsilon^3, \quad (19)$$

$$\Omega = \frac{\omega_f}{\omega_{ref}}, \quad (20)$$

dan $\alpha = \frac{mP_0L}{EA\epsilon^3}$.

Solusi Persamaan (16-18) akan diselesaikan dengan cara menjumlahkan solusi stasioner dan solusi tak stasioner. Di dalam perhitungan ini, diasumsikan semua parameter yang digunakan disetiap *span* sama,

$$\begin{aligned} X(s, t; n) &= X_0(s) + x(s, t; n), \\ Y(s, t; n) &= Y_0(s) + y(s, t; n), \\ T(s, t; n) &= T_0(s) + \tau(s, t; n), \end{aligned} \quad (21)$$

diperoleh solusi stasioner untuk *span* ke-1 dan *span* ke-2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T_0(s) &= \mu, \\ X_0(s) &= \mu s - \frac{4}{3}((2s - 1)^3 + 1), \\ Y_0(s) &= 4s(s - 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (22) ke persamaan (16-18), diperoleh masalah tak stasioner

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\mu + \tau) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + 8\tau + \alpha P(s) \sin(\Omega t), \quad (24)$$

$$\tau = \frac{\partial x}{\partial s} + 8 \left(s - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2. \quad (25)$$

Dengan menyelesaikan persamaan tak stasioner serta substitusi syarat batas untuk *span* ke-1 diperoleh

$$\begin{aligned} y_1'' - \mu y_1' + 32 \int_0^1 (y_1 + y_2) = 2 \int_0^1 \left(\left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{ds} \right)^2 \right) ds + \frac{1}{4} y_1'' \int_0^1 \left(\left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{ds} \right)^2 \right) ds - \\ 4y_1' \int_0^1 (y_1 + y_2) ds + 4 y_1(1; t)(y_1' + 8) + \alpha P(s) \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} y_2'' - \mu y_2' + 32 \int_0^1 (y_1 + y_2) = 2 \int_0^1 \left(\left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{ds} \right)^2 \right) ds + \frac{1}{4} y_2'' \int_0^1 \left(\left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{ds} \right)^2 \right) ds - \\ 4y_2' \int_0^1 (y_1 + y_2) ds + 4 y_2(1; t)(y_2' + 8) + \alpha P(s) \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (27)$$

3. Penyelesaian dengan Metode *Multiple Scales*

3.1 Metodologi Solusi

Akan diselesaikan Persamaan (26) dan Persamaan (27) dengan menggunakan metode *multiple scales*.

Misalkan

$$y_1(s, t) = \epsilon y_{11}(s, T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 y_{12}(s, T_0, T_1, \dots) + \epsilon^3 y_{13}(s, T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (28)$$

$$y_2(s, t) = \epsilon y_{21}(s, T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 y_{22}(s, T_0, T_1, \dots) + \epsilon^3 y_{23}(s, T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (29)$$

dengan $T_n = \epsilon^n t, n = 0, 1, \dots$ dan ϵ merupakan parameter. Turunan pertama dan kedua terhadap waktu diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_0 + \epsilon \partial_1 + \epsilon^2 \partial_2 + \dots \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_0^2 + 2 \epsilon \partial_0 \partial_1 + \epsilon^2 (2 \partial_0 \partial_1 + \partial_1^2) + \dots, \quad (31)$$

untuk kemudahan penulisan dimisalkan $\partial_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ dan $\partial_{nm}^2 = \frac{\partial^2}{\partial T_n \partial T_m}$ (dimana ∂_n^2 untuk $n = m$).

Pada paper ini, diasumsikan bahwa gaya luar adalah orde ϵ^2 . Sehingga, $\alpha = \epsilon^2$. Substitusi Persamaan (28-31) ke Persamaan (26) dan Persamaan (27) dengan

$$y' = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ dan } y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \text{ sehingga diperoleh persamaan untuk}$$

orde ϵ :

$$\partial_0^2 y_{11} - \mu y_{11}'' + 32 \int_0^1 (y_{11} + y_{21}) ds = 32 y_{11} \quad (32)$$

$$\partial_0^2 y_{21} - \mu y_{21}'' + 32 \int_0^1 (y_{11} + y_{21}) ds = 32 y_{11} \quad (33)$$

orde ϵ^2 :

$$\partial_0^2 y_{12} - \mu y_{12}'' + 32 \left(\int_0^1 (y_{12} + y_{22}) ds - y_{12}(1) \right) = -2 \partial_{01}^2 y_{11} + 2 \int_0^1 ((y_{11}')^2 + (y_{21}')^2) ds$$

$$-4 y_{11}'' \int_0^1 (y_{11} + y_{21}) ds + 4y_{11}(1) y_{11}'' + P(s) \sin(\Omega t) \quad (34)$$

$$\partial_0^2 y_{22} - \mu y_{22}'' + 32 \left(\int_0^1 (y_{12} + y_{22}) ds - y_{12}(1) \right) = -2\partial_0^2 y_{21} + 2 \int_0^1 ((y_{11}')^2 + (y_{21}')^2) ds$$

$$-4 y_{21}'' \int_0^1 (y_{11} + y_{21}) ds + 4y_{21}(1) y_{11}'' + P(s) \sin(\Omega t) \quad (35)$$

3.1.1 Solusi untuk Orde ε

Solusi dari Persamaan (32) dan Persamaan (33) adalah

$$y_{11}(s, T_0, T_1) = u_1(s)R(T_1) \sin(\omega T_0 + \phi(T_1)), \quad (36)$$

$$y_{21}(s, T_0, T_1) = u_2(s)R(T_1) \sin(\omega T_0 + \phi(T_1)). \quad (37)$$

dengan $u_1(s)$ dan $u_2(s)$ adalah amplitudo yang bergantung terhadap s , R amplitudo yang bergantung terhadap waktu, ω adalah frekuensi natural sistem, dan ϕ merupakan fase. Fungsi R dan ϕ adalah fungsi dari T_1 yang akan ditentukan kemudian.

Substitusi Persamaan (36) dan Persamaan (37) ke Persamaan (32) diperoleh persamaan untuk $u_1(s)$ berikut:

$$k^2 u_1 + u_1'' - C = 0 \quad (38)$$

dimana $k^2 = \frac{\omega^2}{\mu}$ dan konstanta C

$$C = \frac{32}{\mu} \int_0^1 (u_1(s) + u_2(s)) ds - \frac{32}{\mu} u_1(1). \quad (39)$$

Substitusi Persamaan (36) dan Persamaan (37) ke Persamaan (33) diperoleh persamaan untuk $u_2(s)$

$$k^2 u_2 + u_2'' - C = 0 \quad (40)$$

Solusi umum dari Persamaan (38) dan Persamaan (40) adalah

$$u_1(s) = C_1 \cos(ks) + C_2 \sin(ks) + \frac{C}{k^2} \quad (41)$$

$$u_2(s) = D_1 \cos(ks) + D_2 \sin(ks) + \frac{C}{k^2} \quad (42)$$

dengan syarat batas

$$u_1(0) = u_2(1) = 0, u_1(1) = u_2(0), u_1'(1) = u_2'(0) \quad (43)$$

Aplikasi kondisi homogen ke persamaan $u_1(s)$ dan $u_2(s)$ menghasilkan Solusi (41) dan (42) berbentuk

$$\begin{aligned} u_1(s) &= -\frac{C}{k^2} \cos(ks) - \frac{C}{k^2} \tan k \sin(ks) + \frac{C}{k^2} \\ &= \frac{C}{k^2} (1 - \cos(ks) - \tan k \sin(ks)). \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} u_2(s) &= \left(\frac{C}{k^2} \cos k - \frac{-C}{k^2} \tan k \sin k \right) \cos(ks) + \frac{C}{k^2} \\ &= \frac{-C}{k^2} (-\cos k - \tan k \sin k) \cos(ks) - \frac{C}{k^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Substitusi Persamaan (44) dan Persamaan (45) ke Persamaan (39) dan perkalian dengan $\mu \frac{k^2}{64}$ menghasilkan

$$C \left[\mu \frac{k^2}{64} - \frac{1}{2} + \frac{\tan k}{k} - \frac{\sec k}{2} \right] = 0. \quad (46)$$

Ada dua kemungkinan nilai C , yakni $C = 0$ atau $C \neq 0$. Nilai C berkaitan dengan gaya tegangan dimana $C = -8\tau_{11}\mu$ dengan τ_{11} komponen orde linier dari τ . Nilai $C = 0$ bersesuaian dengan tidak adanya gaya tegangan pada orde linier ε . Hal ini dikenal juga dengan istilah *gravity wave* atau *tension-free vibration*. Sedangkan untuk $C \neq 0$ tegangan atau gaya elastis mempengaruhi gerakan sistem atau disebut juga *elasto-gravity wave*. Pada paper ini, akan dibatasi hanya untuk *tension-free vibration*.

Untuk *tension-free vibration* yakni $C = 0$, agar Persamaan (41) dan Persamaan (42) memenuhi kondisi batas homogen maka

$$u_1(s) = \sin(ks), u_2(s) = -\sin(ks). \quad (47-48)$$

Pada Persamaan (47) dan Persamaan (48) konstanta dihilangkan karena tidak berpengaruh. Penggunaan kondisi batas homogen pada Persamaan (39) menghasilkan

$$k = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

3.1.2 Solusi untuk Orde ε^2

Dari subbab 3.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \sin(ks), \\ u_2(s) &= -\sin(ks). \end{aligned}$$

dengan $k = 2\pi n$ dan $k = \omega/\sqrt{\mu}$.

Sehingga Persamaan (36) dan Persamaan (37) menjadi

$$\begin{aligned} y_{11}(s, T_0, T_1) &= \sin(ks) R(T_1) \sin(\omega T_0 + \phi(T_1)) \\ y_{21}(s, T_0, T_1) &= -\sin(ks) R(T_1) \sin(\omega T_0 + \phi(T_1)). \end{aligned}$$

Pada subbab ini akan diinvestigasi perilaku resonansi dari sistem disebabkan oleh adanya gaya luar. Frekuensi Ω dari gaya luar diasumsikan sangat dekat dengan frekuensi natural sistem ω . Tulis $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ dengan σ merupakan *detuning parameter*. Substitusi Persamaan (36) dan Persamaan (37) ke Persamaan (34), maka diperoleh ruas kanan dari Persamaan (34)

$$\begin{aligned} F &= -2\omega u_1(s) \cos(\omega T_0 + \phi) \partial_1 R - R \sin(\omega T_0 + \phi) \partial_1 \phi + k^2(2 + 2 \sin k) R^2 \sin(\omega T_0 + \phi)^2 \\ &+ P(s) \sin(\omega T_0 + \sigma T_1) = -2\omega u_1(s) (\cos(\omega T_0 + \phi) \partial_1 R - R \sin(\omega T_0 + \phi) \partial_1 \phi + k^2(2 + \\ &2 \sin k) R^2 \sin(\omega T_0 + \phi)^2 + P(s)(\sin(\omega T_0 + \phi) \cos(\phi - \sigma T_1) - \cos(\omega T_0 + \phi) \sin(\phi - \sigma T_1))). \end{aligned} \quad (50)$$

Pada Persamaan (50), $\sin(\omega T_0 + \sigma T_1) = \sin(\omega T_0 + \phi + \sigma T_1 - \phi)$ dan kemudian dijabarkan. Perhatikan bahwa solusi homogen dari Persamaan (50) diberikan oleh Persamaan (36) dan Persamaan (37). Dari Persamaan (50) resonansi akan terjadi jika $P(s)$ memuat suku Fourier yang proporsional dengan u_1 . Tanpa mengurangi keumuman, tulis kembali $P(s) = u_1(s)$.

$$F = -2\omega u_1(s) (\cos(\omega T_0 + \phi) \partial_1 R - R \partial_1 \phi) + k^2(2 + 2 \sin k) R^2 \sin(\omega T_0 + \phi)^2 + u_1(s) (\sin(\omega T_0 + \phi) \cos(\phi - \sigma T_1) - \cos(\phi - \sigma T_1) \sin(\phi - \sigma T_1)). \quad (51)$$

Untuk mencegah *nonuniform* dari ekspansi solusi, maka suku sekular dari Persamaan (51) harus dihilangkan

$$\frac{dR}{dT_1} = -\frac{\sin(\phi - \sigma T_1)}{2\omega}, \quad (52)$$

$$\frac{d\phi}{dT_1} = -\frac{\cos(\phi - \sigma T_1)}{2\omega R} \quad (53)$$

Misalkan $\Phi = \phi - \sigma T_1$, diperoleh persamaan autonomous

$$\frac{dR}{dT_1} = -\frac{\sin \Phi}{2\omega}, \quad (54)$$

$$\frac{d\Phi}{dT_1} = -\frac{\cos \Phi}{2\omega R} - \sigma \quad (55)$$

Sehingga diperoleh

$$R \frac{d(\cos \Phi)}{dR} + \cos \Phi = -2\sigma \omega R \quad (56)$$

yang memiliki solusi

$$\cos \Phi = -\sigma \omega R + \frac{K_0}{R}, \quad (57)$$

dengan konstanta K_0 ditentukan dari suatu nilai awal. Persamaan (57) akan digunakan untuk menggambarkan bidang fasa.

4. Analisis dan Hasil

Pada bagian ini akan diberikan analisis dari titik ekuilibrium sistem Persamaan (54) dan (55). Simulasi numerik serta analisis terhadap solusi sistem dua kabel juga akan dipaparkan.

Titik ekuilibrium dari persamaan autonomous (54) dan (55) adalah (R_0, Φ_0) dimana

$$(R_0, \Phi_0) = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{2\omega\sigma}, n\pi\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

Selanjutnya diamati perilaku untuk titik ekuilibrium pada saat $\Phi = 0$ yaitu sistem *in-phase* dengan gaya luar dan $\Phi = \pi$ ketika sistem *out-of-phase* dengan gaya luar. Matriks Jacobi dari Persamaan autonomous (54) dan (55) adalah

$$J(R_0, \Phi_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\cos(\Phi_0)}{2\omega} \\ \frac{\cos(\Phi_0)}{2\omega R_0^2} & \frac{\sin(\Phi_0)}{2\omega R_0^2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Untuk titik ekuilibrium yang diamati, setelah disubstitusikan ke matriks Jacobi diperoleh nilai eigen adalah solusi persamaan dari

$$\lambda^2 + \sigma^2 = 0. \quad (60)$$

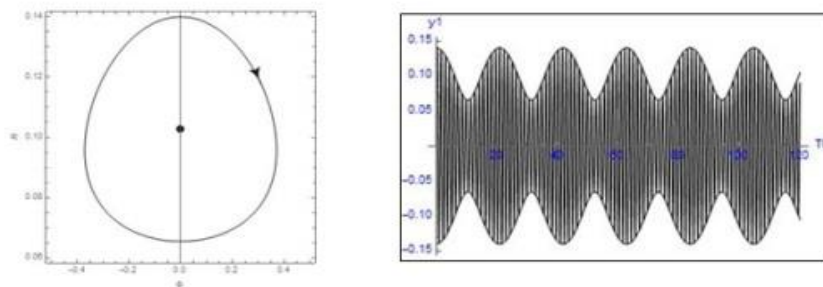
Sehingga untuk $\Phi = 0$ dan $\Phi = \pi$ titik ekuilibrium berupa center. Pada paper ini hanya akan dianalisa kestabilan untuk titik R_0 positif. Nilai R_0 akan positif pada saat

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow (R_0, \Phi_0) = \left(\frac{1}{2\omega\sigma}, 0\right) \quad (61)$$

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow (R_0, \Phi_0) = \left(\frac{1}{2\omega\sigma}, \pi\right).$$

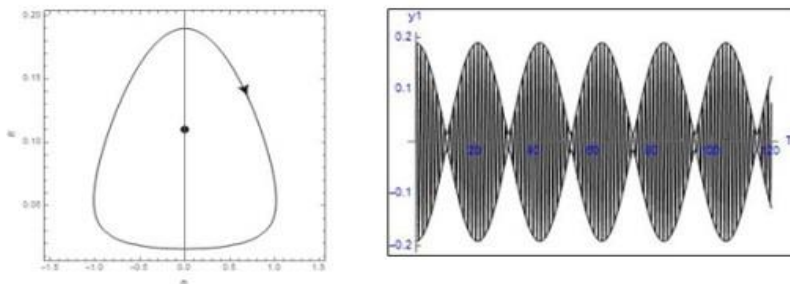
Prilaku dari sistem akan dianalisa dengan memperhatikan plot dari persamaan $\hat{y}_{11}(T_0) = R(\varepsilon T_0) \sin(2\pi\sqrt{\mu}T_0 + \sigma\varepsilon T_0 + \Phi(\varepsilon T_0))$ (62) dan juga plot dari Persamaan (56) yang merupakan bidang fasa dari sistem. Fungsi R dan Φ diperoleh dari menyelesaikan sistem persamaan (54-55). Nilai ε yang digunakan untuk simulasi adalah $\varepsilon = 0.3$.

Pada Gambar 4.1, dipilih kondisi awal dekat dengan titik ekuilibrium. Terlihat pada Gambar dari kondisi awal (0.14,0) sistem berosilasi dengan amplitudo yang menurun dengan fase Φ yang naik sampai ke amplitudo tertentu dan kemudian lanjut berosilasi dengan amplitudo turun dan juga fase yang turun. Ketika amplitudo sampai pada nilai minimumnya, sistem akan berosilasi dengan amplitudo yang naik dan fase yang turun kemudian lanjut berosilasi dengan amplitudo naik dan juga fase yang naik sampai kembali pada nilai awalnya.

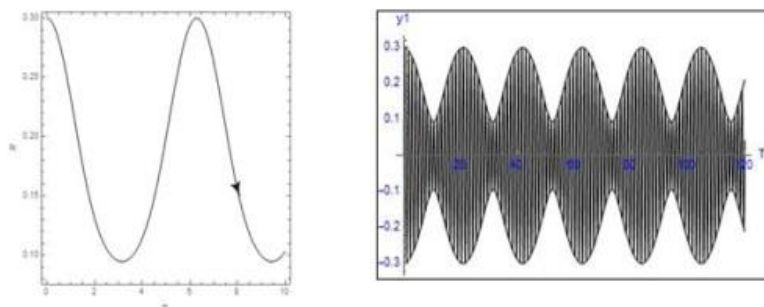


Gambar 3 Untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = -1$ dan kondisi awal (0.14,0). Kiri: Plot bidang fasa dari R vs Φ .
 Kanan: Plot dari $\hat{y}_{11}(T_0)$.

Kemudian ketika nilai awal dari amplitudo dinaikan menjadi 0.2, perilaku dari sistem berubah seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.2. Dari kondisi awal (0.2,0) sistem berosilasi sampai nilai dari fase berada di titik 0.6 dan kemudian sistem lanjut berosilasi dengan nilai fase meloncat ke titik -0.6. Pada kondisi awal ini nilai amplitudo mendekati nol.

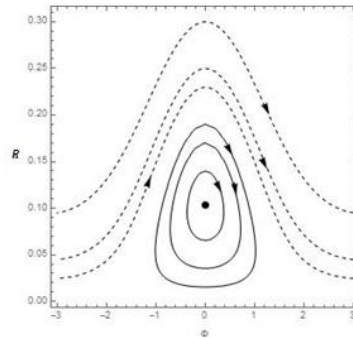


Gambar 4 Untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = -1$ dan kondisi awal (0.19,0). Kiri: Plot bidang fasa dari R vs Φ .
 Kanan: Plot dari $\hat{y}_{11}(T_0)$.



Gambar 5 Untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = -1$ dan kondisi awal (0.3,0). Kiri: Plot bidang fasa dari R vs Φ .
 Kanan: Plot dari $\hat{y}_{11}(T_0)$.

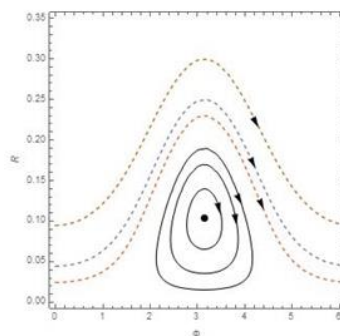
Pada Gambar 6, ketika nilai awal amplitudo dinaikkan dari sebelumnya maka sistem akan berosilasi dengan perubahan amplitudo yang tetap dan kenaikan dari fase bergantung pada waktu. Sama halnya dengan Gambar 4.1 pada mulanya amplitudo turun dari nilai awalnya dengan nilai fase yang naik kemudian pada waktu tertentu amplitudo dan fase akan sama-sama naik dan tidak akan pernah kembali ke nilai awal. Selanjutnya pada Gambar 4.4 plot bidang fasa memperlihatkan efek dari bermacam-macam nilai awal amplitudo R_{in} pada kondisi awal $(R_{in}, 0)$ untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = -1$. Titik menunjukkan titik (stabil) ekuilibrium.



Gambar 6 Untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = -1$ dan kondisi awal $(R_{in}, 0)$

Selanjutnya untuk nilai $\mu = 0.6$ dan $\sigma = 1$ Gambar 4.5 memperlihatkan plot dari bidang fasa dari kondisi *out-of-phase* dengan nilai awal amplitudo yang berbeda-beda. Perilaku dari sistem sama dengan perilaku untuk sistem dengan kondisi *in-phase* namun dengan nilai σ yang berbeda serta titik ekuilibrium yang berbeda.

Jadi, jika σ bernilai negatif, maka amplitudo akan bernilai positif pada saat *in-phase* dengan gaya luar dan jika σ bernilai positif, maka amplitudo akan bernilai positif pada saat *out-of-phase* dengan gaya luar.



Gambar 7 Untuk $\mu = 0.6$, $\sigma = 1$ dan kondisi awal (R_{in}, π)

5. Kesimpulan

Pada paper ini telah diturunkan model *galloping* pada kabel transmisi dengan asumsi adanya gaya luar. Penerapan metode *multiple scales* pada model *galloping* memberikan keluaran persamaan diferensial biasa dari amplitudo dan fase yang bergantung terhadap detuning parameter σ . Diperoleh dua titik ekuilibrium yang berupa center (stabil).

Untuk nilai σ yang negatif, maka nilai amplitudo akan positif saat fase bernilai nol (*in-phase*), pada kondisi ini jika kondisi awal yang dipilih cukup dekat dengan titik ekuilibrium maka kabel akan berosilasi periodik dengan nilai fase yang terbatas. Kemudian jika kondisi awal dipilih sedikit lebih jauh dari titik ekuilibrium, maka kabel akan berosilasi dengan amplitudo awal merupakan amplitudo yang maksimum dan pertambahan nilai fase yang bergantung terhadap waktu. Sedangkan untuk nilai σ yang positif, maka nilai amplitudo akan positif saat fase bernilai π (*out-of-phase*) dan perilaku yang ditunjukkan sistem pada kondisi ini mirip dengan perilaku saat σ bernilai negatif.

Referensi

- [1] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.
- [2] M.Pakdemirli, M.M.F. Karahan, H. Boyacı, A New Perturbation Algorithm with Better Convergence Properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method. *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 14, No. 1, pp. 31-44, 2009.
- [3] S.W.Rienstra, Nonlinear Free Vibrations of Coupled Spans of Overhead Transmission Lines. *Journal of Engineering Mathematics*, 337-348, 2005.