ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Invers Matriks Blok 2×2 Dalam Aplikasi Matriks $FLDcirc_r$ Bentuk Khusus

Ade Novia Rahma[1], Maura Anggelina[2] , Rahmawati[3] Zukrianto
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. HR. Soebrantas Km.15 Panam, Pekanbaru
e-mail: ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, raramaura253@gmail.com, rahmawati.@uin-suska.ac.id

Abstrak

Di dalam jurnal ini, akan dibahas tentang invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ dari suatu matriks berbentuk khusus dengan menggunakan komplemen schur yang mempunyai dua submatriks yang invertible, terdapat dua langkah untuk menentukan invers blok matriks 2×2. Hasil yang diperoleh adalah mendapatkan bentuk umum invers submatriks yang invertible dari matriks $FLDcirc_r$ dan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus.

Kata kunci: blok 2×2; $FLDcirc_r$; invers; komplemen schur; matriks

Abstract

In this journal, we will discuss 2×2 block matrix inverses in the $FLDcirc_r$ matrix application of a specially shaped matrix using a Schur complement which has two submverrices that are invertible, there are several steps to determine the 2×2 block matrix inverse. The results obtained are obtaining the invertible form of submatrix inverse of the $FLDcirc_r$ matrix and the 2×2 block inverse matrix in the special form matrix $FLDcirc_r$ application.

***Keywords**: 2×2 block; $FLDcirc_r$; inverse; schur complements; matrix*

1. Pendahuluan

Menurut Brian J. Olson (2014), matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun secara pengulangan pindah satu posisi ke kanan untuk membentuk baris berikutnya [1]. Menurut Xue Pan dan Mei Qin (2015), matriks FLD$circ_r$ adalah sebuah tipe baru dari matriks circulant. Bentuk umum dari matriks FLD$circ_r$ adalah sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 - ra_2 & ra_4 - ra_3 & \cdots & a_0 - ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - ra_1 & ra_3 - ra_2 & \cdots & ra_{n-1} - a_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

dapat ditulis dengan $A = FLDcirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ [2].

Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu, salah satunya yaitu untukmenentukan invers. Menurut Ilhamsyah Dkk (2017), matriks blok adalah matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut [3]:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \quad (2)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Pada tahun 2018, Rysfan juga telah melakukan penelitian mengenai invers matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan metode adjoin dengan bentuk khusus seperti berikut ini: $A_n =$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } x, r \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Persamaan (3) dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r\ (0, x, 0, \ldots, 0)$. [4]
Adapun hasil invers matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan diatas yang diperoleh pada artikel tersebut adalah sebagai berikut.

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (rx)^{-1} \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Pada makalah ini penulis akan menentukan rumus umum untuk invers dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus sebagai berikut:

$$P_n = \left[\begin{array}{c|cccccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{dengan } a, r \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

2. Metode Penelitian

Matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

Misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Kemudian diberi garis horizontal dan vertikal sehingga menjadi matriks seperti persamaan (2):

Sehingga dapat dimisalkan seperti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$C=\begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$P=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definisi 2 (M. Radivo Zaglia, 2004): Komplemen schur merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen *schur* biasanya digunakan pada matriks bujur sangkar yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah di blok.[5]

Diberikan matriks:

$$\underset{(k+l)\times(m+n)}{P}=\begin{pmatrix} \underset{k\times m}{A} & \underset{k\times n}{B} \\ \underset{l\times m}{C} & \underset{l\times n}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari A adalah $D-CA^{-1}B$.
2. Jika D adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari D adalah $A-BD^{-1}C$.
3. Jika B adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari B adalah $C-DB^{-1}A$.
4. Jika C adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari C adalah $B-AC^{-1}D$.

Definisi 3 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004): Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dan jika matriks B dapat dicari sedemikian sehingga $AB=BA=I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A dan dapat ditulis $B=A^{-1}$. [6]

Definisi 4 (Tzon Tzer Lu dan Sheng Hua Shiou, 2002): Sebuah matriks persegi tak singular P dan mempunyai P^{-1} dapat dipartisi menjadi blok 2×2 seperti persamaan (2). [7]

Untuk membuat perkalian R dengan R^{-1} dan R^{-1} dengan R, ukuran semua blok tidak dapat sembarang. Misalkan $A, B, C,$ dan D mempunyai ukuran $k\times m$, $k\times n$, $l\times m$ dan $l\times m$, berturut-turut dengan $k+l=m+n$. Lalu ukuran E, F, G dan H mempunyai ukuran $m\times k$, $m\times l$, $n\times k$, dan $n\times l$. Dengan kata lain, R^{-1} ada di dalam partisi transpos dari R.

Di bagian ini, untuk E, F, G dan H istilah dari $A, B, C,$ dan D. Misalkan salah satu blok dari $A, B, C,$ dan D adalah matriks persegi tak singular, untuk menghindari terjadinya kesalahan partisi pada invers umum, sehingga mempunyai tiga kemungkinan partisi

1. Partisi diagonal persegi: $k=m$ dan $l=n$
2. Kuadrat partisi diagonal: $k=n$ dan $l=m$
3. Semua partisi persegi: $k=l=m=n$

Teorema 1 (Tzon Tzer Lu dan Sheng Hua Shiou, 2002): Misalkan P merupakan matriks persegi:

i. Diasumsikan submatriks A pada matriks P dalam Persamaan (2) adalaht tak singular. Matriks P pada Persamaan (2) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari A punya invers dan $(D-CA^{-1}B)$ juga memiliki invers didapat
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

ii. Diasumsikan submatriks D pada matriks P dalam Persamaan (2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (2) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari D punya invers dan $(A-BD^{-1}C)$ juga memiliki invers didapat
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

iii. Diasumsikan submatriks B pada matriks P dalam Persamaan (2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (2) punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari B punya invers dan $(C-DB^{-1}A)$ juga memiliki invers didapat

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1}+B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

iv. Diasumsikan submatriks C pada matriks P dalam Persamaan (2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (2) punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari C punya invers dan $(B-AC^{-1}D)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1}+C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & -(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada tulisan ini berisi proses untuk menentukan persamaan umum invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLD\mathrm{c}irc_r$ bentuk khusus. Proses pertama adalah memblok matriks dan menentukan submatriks $FLD\mathrm{c}irc_r$ bentuk khusus. Proses kedua adalah membuktikan persamaan umum dalam menentukan invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLD\mathrm{c}irc_r$ bentuk khusus dan proses terakhir adalah membuktikan persamaan umum menentukan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLD\mathrm{c}irc_r$ bentuk khusus menggunakan komplemen *schur*.

Berikut proses dalam menentukan matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) dengan menggunakan komplemen *schur* berorde 3×3 sampai $n\times n$ yang disajikan sebagai berikut.

1. Memblok matriks $FLDcirc_r\ P$ menjadi matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) berorde 3×3 sebagai berikut.

$$P_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 \\ 0 & ra & -ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{6}$$

2. Memblok matriks $FLDcirc_r\ P$ menjadi matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) berorde 4×4 sebagai berikut.

$$P_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{7}$$

3. Memblok matriks $FLDcirc_r\ P$ menjadi matriks blok 2×2 sesuai Persamaan (4) berorde 5×5 sebagai berikut.

$$P_5 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{8}$$

4. Memblok matriks $FLDcirc_r\ P$ menjadi matriks blok 2×2 sesuai Persamaan (4) berorde $n\times n$ sebagai berikut.

$$P_n = \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{9}$$

Berikut proses dalam menentukan bentuk umum invers submatriks yang *invertible* pada Persamaan (6) sampai Persamaan (9) dengan menggunakan komplemen *schur*. Invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 sampai $n\times n$ yang disajikan sebagai berikut.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

1. Invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3, yaitu
Diberikan submatriks B dan C pada Persamaan (6) sebagai berikut.

$$B = [a]$$

$$C = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$$

Invers matriks tersebut adalah

$$B^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right] \tag{10}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix} \tag{11}$$

2. Invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 4×4, yaitu
Diberikan submatriks B dan C pada Persamaan (7) sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$$

Invers matriks tersebut adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix} \tag{13}$$

3. Invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 5×5, yaitu
Diberikan submatriks B dan C pada Persamaan (8) sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$$

Invers matriks tersebut adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix} \tag{15}$$

4. Invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde $n \times n$, yaitu
Diberikan submatriks B dan C pada Persamaan (9) sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$$

Invers matriks tersebut adalah

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}$$

Teorema 2. Diberikan matriks sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ dan } C^{-1} = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$$

Dimana B dan C merupakan suatu submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus dengan $a, r \in \mathbb{R}$, maka invers matriks B dan C adalah:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \text{ dan } C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 3 dan sifat-sifat invers matriks, maka pembuktian Teorema 2 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $BB^{-1} = I$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}_n$$

Hasil perkalian matriksnya adalah

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n = I$$

Dan
$CC^{-1} = I$.

$$CC^{-1} = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Berdasarkan pembuktian diatas, terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $BB^{-1} = I$ dan $CC^{-1} = I$. Sehingga, Teorema 2 terbukti. ∎

Berikut proses dalam menentukan bentuk umum matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (4) dengan menggunakan komplemen *schur*. Setelah mendapatkan invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 sampai $n \times n$ menggunakan Teorema 2 yang disajikan sebagai berikut.

1. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 3×3 yaitu

$A = [0 \quad 0]$

$D = \begin{bmatrix} 0 \\ -ra \end{bmatrix}$

Berdasarkan Teorema 2 maka diperoleh invers submatriks yang *invertible* yaitu

$B^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

Submatriks A merupakan matriks nol maka diperoleh $(C - DB^{-1}A)^{-1} = C^{-1}$, sehingga rumus di atas dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Subsitusikan nilai D, B^{-1} dan C^{-1} kedalam $-C^{-1}DB^{-1}$

$$-C^{-1}DB^{-1} = -\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -ra \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

2. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 4×4, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ra & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2 maka diperoleh invers submatriks yang *invertible* yaitu

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

Submatriks A merupakan matriks nol maka diperoleh $(C - DB^{-1}A)^{-1} = C^{-1}$, sehingga rumus diatas dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$(P_4)^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Subsitusikan nilai D, B^{-1} dan C^{-1} kedalam $-C^{-1}DB^{-1}$

$$-C^{-1}DB^{-1} = -\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ra & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$(P_4)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

3. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 5×5, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ra & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2 maka diperoleh invers submatriks yang *invertible* yaitu

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh

$$(P_4)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{ra} & -\frac{1}{ra} \\ 0 & -\frac{1}{ra} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -ra & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \right) & \begin{bmatrix} \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ 0 & \frac{1}{ra} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{ra} & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Dengan menggunakan cara yang sama sehingga diperoleh invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ untuk P_n yaitu

$$(P_n)^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan dugaan tersebut, maka bentuk umum invers submatriks $FLDcirc_r$ orde $n \times n$ disajikan pada Teorema 3 berikut.

Teorema 3 Diberikan P_n suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde $n \geq 3$ pada Persamaan (4) dengan $a, r \in \mathbb{R}$ maka invers matriks P_n adalah:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$(P_n)^{-1}=\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 4, maka pembuktian Teorema 3 cukup dengan menunjukan bahwa terdapat I sedemikian sehingga $PP^{-1}=I$.

$$PP^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}_n$$

Hasil perkalian matriksnya adalah

$$PP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n$$

Berdasarkan pembuktian diatas, terdapat matriks identitas *I* sedemikian sehingga $PP^{-1}=I$. Sehingga Teorema 3 terbukti.

■

Daftar Pustaka

[1] Brian J. Olson, dkk. "*Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis*". Vol 66. 2014.

[2] Pan, Xue dan Qin, Mei. "*The Discriminance for FLDcircr Matrices and the Fast Algorithm of Their Inverse and Generalized Inverse*". Vol 05, hal 54-61, Shanghai. 2015.

[3] Ilhamsyah, dkk. "*Determinan dan Invers Matriks Blok* 2×2". Vol 06, No.3, hal.193-202. 2017.

[4] Rysfan. "*Menentukan Invers Matriks FLDcircr bentuk khusus Menggunakan Metode Adjoin*", Uin Suska Riau. 2018.

[5] Zaglia, M. R. "*Pseudo-Schur Complements and their Properties*". Apll.Numer Math Vol 50, hal 511-519. 2004.

[6] Anton, Howard dan Rorres, Chris."*Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan*". Erlangga. Jakarta. 2004.

[7] Lu, T. T dan Shio, S. S. "*Inverses of* 2×2 *Block Matrices*". Computer and Mathematic with Application, Vol 43, hal.119-129. 2002.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

[8] Haryono. "*Invers Matriks Blok* 3×3 *dan Aplikasinya pada Matriks Diagonal dan Segitiga*", Uin Suska Riau. 2018.
[9] Meyer, Carl. D. "*Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*". Siam. Philadelphia. 2000
[10] Tian, Yongge dan Takane ,Yoshio. "*Complemen Schur and Banachiewicz Schur Form*". Vol. 13, hal 408-418. 2005