Penentuan Nilai Eigen Tak Dominan Matriks Hermit Menggunakan Metode Pangkat Invers Dengan Nilai Shift

Fitri Aryani[1], Rizka Dini Humairoh [2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Suska Riau
Jl. H.R. Soebrantas KM. 15.5 Pekanbaru
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode pangkat invers, hanya bisa digunakan untuk menentukan nilai eigen pada matriks yang nilai eigennya adalah bilangan riil. Untuk menetukan nilai eigen dengan matriks kompleks dapat ditentukan dengan menggunakan nilai shift yang diperoleh dari penerapan teorema Gerschgorin. Teorema Gerchgorin digunakan dalam aljabar untuk menemukan batas dari nilai eigen kompleks matrik berordo $\mathrm{n\,x\,n}$. Nilai shift ini merupakan nilai pendekatan dari nilai eigen tak dominan. Metode seperti ini disebut metode pangkat invers dengan nilai shift. Pemilihan sebuah nilai shift sangat mempengaruhi jumlah iterasi yang dilakukan. Dalam proses penentuan nilai eigen tak dominan tersebut diperlukan vektor awal. Nilai eigen tak dominan yang digunakan adalah nilai eigen tak dominan paling kecil dari nilai eigen tak dominan yang lainnya. Penelitian ini membahas mengenai nilai eigen tak dominan pada matriks Hermit yang berordo 3×3, 4×4 dan 5×5. Hasil yang diperoleh dari pembahasan adalah bahwa nilai eigen tak dominan dari ketiga matriks tersebut tidak terlalu jauh dari pemilihan nilai shift nya.

Kata kunci: matriks Hermit, metode pangkat invers dengan nilai shift, nilai eigen tak dominan.

Abstract

Inverse power method, can only be used to determine the eigenvalues of the matrix whose eigenvalues are real numbers. To determine the eigenvalues with complex matrices can be determined by using the value shift from implementing Gerschgorin theorem. Theorem Gerchgorin used in algebra to find the range of the complex eigenvalues of matrix berordo nx n. This shift value is the value of the approach was the dominant eigenvalues. This method is called inverse power method with shift value. Selection of a value shift greatly affect the number of iterations performed. In the process of determining the dominant eigenvalues do not need the initial vector. No dominant eigenvalues being used is not the dominant eigenvalues smallest of the eigenvalues no other dominant. This study discusses the eigenvalues not dominant on the berordo Hermit matrix 3 × 3, 4 × 4 and 5 × 5. Results obtained from the discussion is that no dominant eigenvalues of the third matrix is not too far from the election of his shift value.

***Keywords**: Hermit matrix, not the dominant eigenvalues, the inverse power method with a shift value,*

1. Pendahuluan

Nilai eigen dapat memberikan kemudahan untuk memecahkan beragam masalah dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya untuk analisis sinyal suara, gerak harmonik, getaran suatu bangunan, analisis wajah, dan lain sebagainya. Nilai eigen sebuah matriks dapat dicari dengan memecahkan persamaan karakteristiknya. Tetapi pada persamaan karakteristik, akan sulit untuk menentukan nilai eigen pada matriks berordo di atas $3\,x\,3$. Untuk itu, metode numerik memberikan suatu cara alternatif yang digunakan untuk menemukan nilai eigen dari suatu matriks agar mempermudah mencari nilai eigen tersebut. Salah satu metode dalam metode numerik untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen adalah metode pangkat (*power method*) dan metode pangkat invers (*inverse power method*).

Metode pangkat adalah suatu langkah iteratif untuk menentukan nilai eigen dominan. Sedangkan metode pangkat invers (*inverse power method*) merupakan metode yang melengkapi metode pangkat (*power method)* untuk menentukan nilai eigen tak dominan. Metode pangkat invers, hanya bisa digunakan untuk menentukan nilai eigen pada matriks yang nilai eigennya bukan kompleks atau entri-entri di dalam matriks bukan bilangan kompleks. Untuk menetukan nilai eigen dengan matriks kompleks dapat ditentukan dengan menggunakan nilai *shift* yang diperoleh dari penerapan teorema *Gerschgorin*. Teorema *Gerchgorin* digunakan dalam aljabar untuk menemukan batas dari nilai eigen kompleks matrik berordo $n\ x\ n$. Nilai *shift* ini merupakan nilai pendekatan dari nilai eigen tak dominan. Metode seperti ini disebut metode pangkat invers dengan nilai *shift*.

Metode pangkat invers dengan nilai *shift* ini harus diketahui vektor eigen tak dominannya sehingga nilai eigen tak dominan dapat langsung ditentukan. Sedangkan dengan perhitungan persamaan karakteristik nilai eigen tak dominan dan vektor eigen tak dominan yang bersesuaian tidak dapat langsung ditentukan bersamaan, hanya nilai eigen tak dominan yang dapat ditentukan. Untuk vektor eigen tak dominan digunakan vektor hampiran awal. Melalui vektor hampiran awal tersebut, pada akhir iterasi akan didapatkan nilai eigen tak dominan dan vektor eigen tak dominan yang bersesuaian.

Adanya vektor hampiran awal dalam metode pangkat invers dengan nilai *shift* ini dapat digunakan pada matriks bujur sangkar dengan entri bilangan rill dan matriks definit negatif. Dalam skripi (Noor Farida, 2007) dengan judul ”*Aplikasi Metode Pangkat dan Metode Deflasi dalam Mengaproksimasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks*” disajikan contoh matriks bujur sangkar beserta penggunaan metode pangkat invers. Sedangkan pada sebuah jurnal (Yuli Andriani, 2011) dengan judul “*Menentukan Nilai Eigen tak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shift”* telah dibuktikan bahwa metode pangkat invers dapat menentukan nilai eigen tak dominan matriks definit negatif.

2. Bahan dan Metode

Matriks Hermit

Suatu bujur sangkar A dengan anggota-anggota kompleks disebut Hermit jika $A = A^*$, dimana A^* adalah konjugat transpose dari matriks A.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi (Howard Anton, 1997) Jika A matriks berordo nxn, maka vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, sehingga memenuhi persamaan:

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ .

Dari Definisi di atas dapat diketahui persyaratan – persyaratan untuk nilai eigen maupun vektor eigen. Nilai eigen λ merupakan bilangan riil, yang berarti anggota dari R^n untuk $A_{n\times n}$ dan x bukan vektor nol. Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$Ax - \lambda x = 0.$$

Mengingat, bahwa A berordo $n \times n$ dan x berordo $n \times 1$, maka dengan mengalikan matriks identitas I yang berordo $n \times n$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis, sebagai:

$$Ax - \lambda I x = 0$$

atau

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Karena vektor eigen $x \neq 0$, maka persamaan di atas harus mempunyai solusi tak trivial, dan oleh karena itu,

$$Det\ (A - \lambda I) = 0.$$

Persamaan tersebut dinamakan persamaan karakteristik dari A, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka determinan $Det\ (A - \lambda I)$ adalah polinom karakteristik dari A.

Untuk setiap vektor eigen x dari A, vektor $x = \frac{x}{\|x\|}$ juga merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ yang sama. Proses seperti ini dinamakan proses normalisasi dan vektor yang dihasilkan adalah vektor yang telah dinormalisasikan.

Nilai *Shift*

Suatu nilai pendekatan terhadap nilai eigen tak domian dari matriks A disebut dengan nilai *shift*. Besarnya nilai *shift* akan diperoleh dari daerah nilai eigen menggunakan Teorema *Gerschgorin*.

Teorema (Sean Brakken, 2007) Setiap nilai eigen matriks A yang berukuran $n\,x\,n$ harus memenuhi :

$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Metode Pangkat Invers

Salah satu cara menghitung nilai eigen terkecil dan vektor eigennya adalah dengan menggunakan matriks invers, jika matriks invers tersebut ada. Metode untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen adalah metode pangkat invers.

Definisi (Howard Anton, 1984) Nilai eigen dari suatu matriks A dinamakan nilai eigen tak dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih kecil dari nilai-nilai eigen yang selebihnya, sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tak dominan dinamakan vektor eigen tak dominan A.

Salah satu cara menentukan nilai eigen tak dominan apabila pendekatan terhadap vektor eigen tak dominan telah diketahui dengan menggunakan *Kuesien Rayleigh* (nilai bagi *Rayleigh*) untuk suatu matriks simetrik A yaitu :

$$\lambda = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

dengan :

λ adalah nilai eigen tak dominan
x adalah vektor eigen tak dominan
A adalah matriks Hermit awal

Vektor Hampiran Awal (Yuli Andriani, 2011)

Pada umumnya vektor hampiran awal untuk metode iterasi dalam mencari vektor eigen dan nilai eigen tak dominan dari suatu matriks $n \times n$ adalah berbentuk :

$$u_0 = (\,111\ \ldots n\,)T_{1xn}$$

karena vektor yang dihampiri jarang sekali banyak memiliki komponen nol. karena proses penormalan di atas maka vektor hampiran awalnya menjadi berbentuk :

$$u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\right) T_{1xn}$$

Analisis Galat (Howard Anton, 1984)

Di dalam metode kuasa invers terdapat dua buah kriteria untuk menghentikan iterasi. Kriteria penghentian pertama berdasarkan galat relatif dari hampiran vektor eigen tak dominan dan kriteria kedua berdasarkan galat relatif dari nilai eigen tak dominan. Kriteria kedua dipakai bila ingin menghentikan iterasi pada galat relatif yang diperbolehkan ε. Maka iterasi dihentikan jika,

$$\left|\frac{\lambda_{ik} - \lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right| \leq \varepsilon$$

dengan λ_{ik} adalah nilai eigen tak dominan λ_i pada iterasi ke-k. Kriteria kedua ini dapat pula dipakai untuk menentukan ketelitian nilai eigen tak dominan yang diperoleh pada iterasi tertentu yang dihentikan karena telah memenuhi ketelitian yang diinginkan bagi nilai eigen tak dominan.

Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam menentukan nilai eigen tak dominan suatu matriks Hermit menggunakan metode pangkat invers dengan nilai *shift* adalah sebagai berikut :

1. Diberikan sebarang matriks A_{3x3}, A_{4x4} dan A_{5x5} sebagai matriks Hermit.
2. Menentukan vektor hampiran awal dan menormalkannya.
3. Menentukan nilai *shift* dari daerah nilai eigen tak dominan menggunakan teorema *Gerchgorin*.
4. Membentuk suatu matriks baru dengan rumus $(A - sI)$.
5. Menentukan matriks L sebagai matriks segitiga bawah dan U matriks segitiga atas dari matriks baru.

6. Menyelesaikan $LY = X_0$
7. Menyelesaikan $UZ = Y$
8. Menormalkan vektor Z
9. Mengalikan matriks A dengan vektor Z yang telah dinormalkan.
10. Menghitung nilai eigen tak dominan dengan menggunakan *kuesien Rayleigh*.
11. Melakukan iterasi dengan mengulangi langkah ke-6 sampai ke-9 dengan vektor awal $X_0 = Z_k$ sampai nilai $\lambda_{k+1} \le \lambda_k$.
12. Menghitung kesalahan relatif untuk nilai eigen tak dominan dengan rumus $\varepsilon \ge \left|\frac{\lambda_{ik}-\lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right|$
13. Mendapatkan hasil nilai eigen tak dominan dengan kesalahan relatif yang kecil.

3. Hasil dan Pembahasan

Makalah ini membahas contoh kasus dalam penentuan nilai eigen tak dominan matriks Hemit Menggunakan Metose Pangkat Invers dengan Nilai Shift.Contoh kasus yang di berikan pada makalah ini berupa matriks hermit dengan ukuran 3 x 3, 4 x 4, dan 5 x 5.

Contoh 1 :

Tentukan nilai eigen tak dominan dari matriks Hermit berikut dengan menggunakan metode pangkat invers dengan nilai *shift* :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1+i & -2-i \\ -1-i & 1 & 1+i \\ -2+i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Penentuan nilai eigen tak dominan dari matriks A menggunakan metode pangkat invers dengan nilai *shift*, dilakukan beberapa langkah sesuai dengan metode penelitian di atas, yaitu: Langkahpertama kita menentukan vector awal.

Vektor awal yang diambil adalah

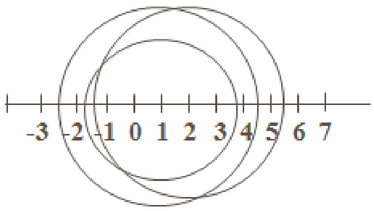
$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menormalkan vektor hampiran awal, sehingga menghasilkan :

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan batas wilayah nilai eigen pada matriks A dengan menggunakan Teorema *Gerschgorin* ;

$$|\lambda - 2| = |-1+i| + |-2-i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} + \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{5} = 3.6503$$
$$|\lambda - 1| = |-1-i| + |1+i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} + \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2.8284$$
$$|\lambda - 1| = |-2+i| + |1-i| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} + \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{5} + \sqrt{2} = 3.6503$$



Gambar 1: Daerah Nilai Eigen Matriks A

Sehingga daerah yang dibatasi untuk pengambilan nilai *shift* adalah $-1.7 \le \lambda \le 3.8$.

Langkah selanjutnya untuk mendapatkan matriks baru, maka dimisalkan nilai *shift*, yaitu $s = 0.1$. Sehingga :

$$A - sI = \begin{bmatrix} 2 & -1+i & -2-i \\ -1-i & 1 & 1+i \\ -2+i & 1-i & 1 \end{bmatrix} - 0.1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 & -1+i & -2-i \\ -1-i & 0.9 & 1+i \\ -2+i & 1-i & 0.9 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya membentuk dekomposisi LU dari matriks baru $(A - sI)$.

Sehingga, $A - sI = LU$

$$\begin{bmatrix} 1.9 & -1+i & -2-i \\ -1-i & 0.9 & 1+i \\ -2+i & 1-i & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.15-0.5i & 1 & 0 \\ -1.05+0.5i & -3.3-4i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.9 & -1+i & -2-i \\ 0 & -0.15 & 0.5-0.6i \\ 0 & 0 & 2.37 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matrik L dan U, kemudian diselesaikan $LY = X_0 LY = X_0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.15-0.5i & 1 & 0 \\ -1.05+0.5i & -3.3-4i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.8655+0.0865i \\ 3.6928+3.4591i \end{bmatrix}$$

Kemudian diselesaikan $UZ = Y$

$UZ = Y$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.0126-11.6788i \\ 4.6046-22.0623i \\ 1.5581+1.4595i \end{bmatrix}$$

Menormalkan z dengan rumus $Z_k = \frac{z}{\sqrt{\bar{z}^T z}}$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.4697-0.6210i \\ 1.2306-0.1436i \\ -0.0490+0.1866i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengalikan Z_1 dengan matriks A, akan menghasilkan

$$AZ_1 = \begin{bmatrix} 0.057-0.032i \\ -0.0157+0.0653i \\ 0.7196+0.4441i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya perkiraan pertama dari nilai eigen tak dominan dengan menggunakan *Kuosien Rayleigh* adalah:

$$\lambda_1 = \frac{\langle Z_1, AZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{{Z_1}^T\ \overline{AZ_1}}{{Z_1}^T\ \overline{Z_1}} = \frac{0.2088}{1} = 0.2088$$

Melakukan hal yang sama seperti di atas dengan mengganti nilai $X_0 = Z_k$ sampai nilai $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k$, sehingga diperoleh

$$\lambda_2 = \frac{\langle Z_2, AZ_2 \rangle}{\langle Z_2, Z_2 \rangle} = \frac{{Z_2}^T\ \overline{AZ_2}}{{Z_2}^T\ \overline{Z_2}} = \frac{0.2087}{1} = 0.2087$$

Setelah dilakukan iterasi untuk penentuan λ_3 diperoleh nilai $\lambda_3 \approx \lambda_2 \approx$ 0.28087 maka iterasi dihentikan.Kemudian menghitung kesalahan relatif untuk nilai eigen tak dominan yaitu :

$$\varepsilon = \left|\frac{\lambda_{ik} - \lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right| = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\right| = \left|\frac{0.2087 - 0.2088}{0.2087}\right| = 4.79 \times 10^{-4}$$

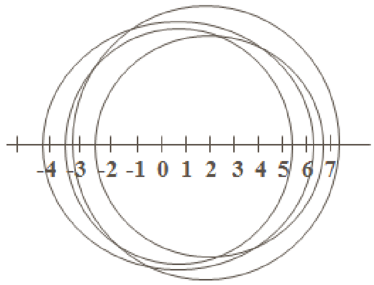
Karena syarat dalam penentuan nilai eigen tak dominan adalah menghentikan iterasi sampai nilai $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k$ dimana $\lambda_2 \leq \lambda_1$ adalah $0.2087 \leq 0.2088$, dengan kesalahan relatif terkecil adalah 4.79×10^{-4}.

Berdasarkan perhitungan dalam menentukan nilai eigen tak dominan dengan menggunakan nilai *shift* pada matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1+i & -2-i \\ -1-i & 1 & 1+i \\ -2+i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$ maka diperoleh nilai eigen tak dominannya adalah 0.2087dengan kesalahan relatifnya sebesar 4.79×10^{-4}.

Selanjutnya dengan perlakuan yang sama seperti contoh 1 di atas maka akan ditentukan nilai eigen tak dominan untuk matriks ukuran 4 x 4, dengan bentuk

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 1-i & 2+i \\ 1-i & 1 & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1-i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$ vektor awal yang diambil adalah

$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan wilayah nilai eigen pada matriks B dengan menggunakan Teorema *Gerschgorin* adalah:



Gambar 2. Daerah Nilai Eigen Matriks B

Sehingga daerah yang dibatasi untuk pengambilan nilai *shift* adalah $-2.24 \leq \lambda \leq 5.24$. Sehingga nilai eigen tak dominannya adalah:

$\lambda_1 = \frac{\langle Z_1, AZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{Z_1{}^T\ \overline{AZ_1}}{Z_1{}^T\ \overline{Z_1}} = \frac{0.6101}{1} = 0.610$ dan

$\lambda_2 = \frac{\langle Z_2, AZ_2 \rangle}{\langle Z_2, Z_2 \rangle} = \frac{Z_2{}^T\ \overline{AZ_2}}{Z_2{}^T\ \overline{Z_2}} = \frac{0.6136}{0.9999} = 0.6136$ dan

$\lambda_3 = \frac{\langle Z_1, AZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{Z_1{}^T\ \overline{AZ_1}}{Z_1{}^T\ \overline{Z_1}} = \frac{0.61328}{1} = 0.61328$ dan

$$\lambda_4 = \frac{\langle Z_4, AZ_4 \rangle}{\langle Z_4, Z_4 \rangle} = \frac{Z_4{}^T\ \overline{AZ_4}}{Z_4{}^T\ \overline{Z_4}} = \frac{0.61325}{1} = 0.61325$$

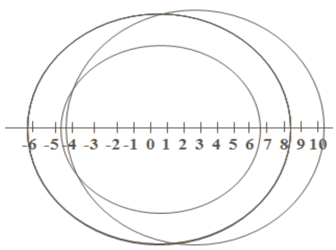
dengan kesalahan relatif untuk nilai eigen tak dominan adalah :

$$\varepsilon = \left|\frac{\lambda_{ik} - \lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right| = \left|\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3}\right| = \left|\frac{0.61325 - 0.61328}{0.61325}\right| = 5.4892 \times 10^{-5}$$

Terakhir akan ditentukan nilai eigen tak dominan untuk matriks ukuran 5 x 5, dengan bentuk

$C = \begin{bmatrix} 1 & -1+i & -2-i & 1-i & -2+i \\ -1-i & 1 & 1+i & 1-i & 1+i \\ -2+i & 1-i & 3 & 2-i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 2+i & 1 & -2-i \\ -2-i & 1-i & 1-i & -2+i & 1 \end{bmatrix}$ vektor awal yang diambil adalah

$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan wilayah nilai eigen pada matriks C dengan menggunakan Teorema *Gerschgorin* adalah:



Gambar 3 Daerah Nilai Eigen Matriks C

Sehingga daerah yang dibatasi untuk pengambilan nilai *shift* adalah $-4.3006 \leq \lambda \leq 6.6569$. dengan nilai *shift*, yaitu $s = 0.4$. Sehingga nilai eigen tak dominan dari matriks di atas adalah:

$\lambda_1 = \frac{\langle Z_1, CZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{{Z_1}^T\ \overline{CZ_1}}{{Z_1}^T\ \overline{Z_1}} = \frac{0.4273}{1} = 0.4273$ dan
$\lambda_2 = \frac{\langle Z_2, CZ_2 \rangle}{\langle Z_2, Z_2 \rangle} = \frac{{Z_2}^T\ \overline{CZ_2}}{{Z_2}^T\ \overline{Z_2}} = \frac{0.4257}{1} = 0.4257$ dan
$\lambda_3 = \frac{\langle Z_3, CZ_3 \rangle}{\langle Z_3, Z_3 \rangle} = \frac{{Z_3}^T\ \overline{CZ_3}}{{Z_3}^T\ \overline{Z_3}} = \frac{0.4276}{1} = 0.4276$ dan
$\lambda_4 = \frac{\langle Z_4, CZ_4 \rangle}{\langle Z_4, Z_4 \rangle} = \frac{{Z_4}^T\ \overline{CZ_4}}{{Z_4}^T\ \overline{Z_4}} = \frac{0.4277}{1} = 0.4277$dan
$\lambda_5 = \frac{\langle Z_5, CZ_5 \rangle}{\langle Z_5, Z_5 \rangle} = \frac{{Z_5}^T\ \overline{CZ_5}}{{Z_5}^T\ \overline{Z_5}} = \frac{0.4276}{1} = 0.4276.$

dengan kesalahan relatif untuk nilai eigen tak dominan adalah :

$$\varepsilon = \left|\frac{\lambda_{ik} - \lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right| = \left|\frac{\lambda_5 - \lambda_4}{\lambda_5}\right| = \left|\frac{0.4276 - 0.4277}{0.4276}\right| = 2.33 \times 10^{-4}$$

4. Kesimpulan

1. Nilai *shift* sangat berpengaruh terhadap nilai eigen tak dominan yang dihasilkan. Jika nilai *shift* mendekati nilai eigen tak dominan, maka hampiran nilai eigen tak dominan semakin mendekati nilai eigen tak dominan yang eksak dengan galat akhir semakin kecil juga. Berlaku untuk sebaliknya.
2. Pengambilan atau pemilihan sebuah nilai *shift* sangat mempengaruhi jumlah iterasi yang dilakukan.

Referensi

[1] Adriani, Yuli. Menentukan Nilai Eigen tak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shift. *Jurnal Penelitian Sains*. 2011 Vol 14, No. 1 (A), hal. 14103-8.
[2] Brakken, Sean. Gershgorin's Theorem for Estimating Eigenvalues. *sthal@ups.edu*. 2007 Vol 1.
[3] Anton, Howard. Aljabar Linear Elementer. Edisi ketiga. Jakarta: Erlangga. 1984
[4] Anton, Howard. Aljabar Linear Elementer Edisi kedelepan jilid I. Jakarta: Erlangga. 1997
[5] Anton, H. dan Panatur Silaban. Aljabar Linear Elementer Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.1987
[6] Hadley, G. Aljabar Linear. Jakarta: Erlangga. 1983
[7] Marc, Lipson dan Seymour Lipschutz. Aljabar Linear. Edisi ketiga. Jakarta: Erlangga. 2004
[8] Munir, Rinaldi. Metode Numerik. Bandung: Informatika. 2008
[9] Pallouras, J.D. Peubah Kompleks untuk Ilmuan dan Insinyur. Terjemahan Wibisono Gunawan. Surabaya: Erlangga. 1975
[10] Setiadji. Aljabar Linear. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2008.
[11] Steven. Aljabar Linear dan Aplikasinya. Jakarta: Erlangga. 2001
[12] Farida, Noor. Aplikasi Metode Pangkat dan Metode Deflasi dalam Mengaproksimasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. 2007