Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

Nilai Total Ketakteraturan Titik Pada Graf Hasil Kali Comb P_m Dan C_5 Dengan m Bilangan Ganjil

C. M. Corazon[1], Rita Riyanti[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin_suska.ac.id, rita.riyanti.rr@gmail.com

ABSTRAK

Suatu pelabelan- k total tak teratur titik dari graf $G(V,E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E adalah pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$, sedemikian sehingga bobot setiap titik berbeda. Bobot sebuah titik v dengan pelabelan λ adalah jumlah dari label titik v dan label semua sisi uv yang terkait dengan titik v. Dengan kata lain, $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$. Nilai total ketakteraturan titik graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Beberapa kelas graf telah didapatkan nilai total ketakteraturan titiknya. Namun masih banyak graf yang belum ditemukan *tvs*-nya.

Pada makalah ini akan dibahas tentang nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \rhd C_5$ yang dinotasikan dengan $tvs(P_m \rhd C_5)$. Hasil penelitian ini adalah $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil. Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \leq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Untuk membuktikan $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ dilakukan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan total tak teratur titik pada graf $P_m \rhd C_5$ menggunakan label terbesar $\left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Katakunci: *pelabelan total tak teratur titik, hasil kali comb, nilai total ketakteraturan titik.*

ABSTRACT

A vertex irregular total k-labeling of a graph G(V,E) with a non empty set V of vertices and a set E of edges, is a labeling $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$, *such that the weight of every vertex are distinct. The weight of a vertex v, under a total labeling λ, is the sum of label of vertex v and all labels of edges that incident with v. In other word,* $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$. *The total vertex irregularity strength, denoted by tvs(G) is the minimum biggest label that use to label graph G with the vertex irregular total labeling. Some classes of graphs have been obtained its total vertex irregularity strength.*

In this paper, author observe about the total vertex irregularity strength of $P_m \rhd C_5$, *denoted by* $tvs(P_m \rhd C_5)$. *The result of this research is* $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ *for* $m \geq 3$ *and* m *is an odd numbers. It will be proven by show that* $tvs(P_m \rhd C_5) \leq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ *and* $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ *is shown by represent existence of the vertex irregular total labeling of graph* $P_m \rhd C_5$.

Keywords: *vertex irregular total labeling, comb product, the total vertex irregularity strength.*

Pendahuluan

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Ada beberapa jenis pelabelan, diantaranya pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Pelabelan total tak teratur diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk. [3]. Mereka memperkenalkan dua jenis pelabelan total tak teratur, yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi.

Hingga kini dikenal beberapa operasi pada graf, diantaranya operasi *join* (+), gabungan (∪), kartesian (×), korona (⊙), dan $comb$ (⊳). Dengan mengoperasikan dua/lebih graf, akan dihasilkan graf yang baru. Misalkan G dan H adalah dua graf sederhana dan x adalah suatu titik di graf H. Graf hasil kali *comb* dari G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan graf G dan menggandakan H sebanyak $|V(G)|$ dan mencangkokkan penggandaan graf H ke- i di titik x ke titik ke-i dari graf G [4].

Pada makalah ini akan dibahas pelabelan total tak teratur titik, khususnya menentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali $comb$ dari P_m dan C_5, yang dinotasikan dengan $tvs(P_m \rhd C_5)$, dimana P_m adalah graf lintasan dengan m titik dan C_5 adalah graf lingkaran dengan lima titik. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya, diantaranya Martin Baca [3], Nurdin dkk. [9], Marcin dkk. [6] dan [7], serta Ahmad dkk. [1] dan [2]. Lebih lengkapnya, penelitian mengenai nilai total ketakteraturan titik ini sudah diuraikan pada [5].

Bahan dan Metode Penelitian

Misalkan $G = (V, E)$, pelabelan-k total didefinisikan sebagai pemetaan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$. Teorema berikut menjelaskan definisi pelabelan total tak teratur titik dan nilai total ketakteraturan titik.

Definisi 1 [3]

Pelabelan-k total dikatakan sebagai pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$.
$wt(x)$ merupakan bobot titik *x* yang dinyatakan sebagai:

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$$

Nilai total ketakteraturan titik graf G (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor komunikasi, transportasi, penyimpanan data komputer dan pemancar frekuensi radio. Pada sistem pengaturan frekuensi radio, permintaan yang besar atas pelayanan *wireless* dan terbatasnya frekuensi yang tersedia memerlukan penggunaan yang efisien.

Masalah yang muncul adalah bagaimana agar gelombang sinyal yang digunakan dapat efisien dan tidak terjadi interferensi. Topik pengoptimalan label pada graf sedemikian hingga membuat setiap bobot titiknya berbeda dipelajari melalui nilai total ketakteraturan titik (tvs). Pada sistem pengaturan frekuensi radio, tvs dapat berupa jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi.

Baca dkk menunjukkan batas bawah dan batas atas dari nilai total ketakteraturan titik untuk sebarang graf.

Teorema 2 [3]

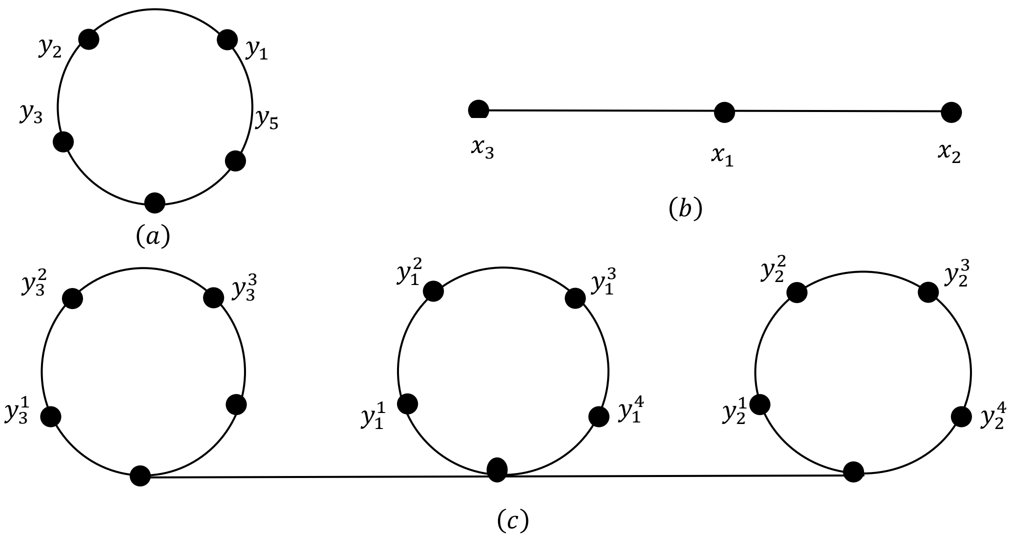
Misalkan *G* adalah graf (*p*,*q*) dengan titik $p = p(G)$ dan sisi $q = q(G)$, derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$, maka $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$.

Berikut ini adalah definisi dari salah satu jenis operasi graf, yaitu operasi hasil kali *comb*. Dengan mengoperasikan dua buah graf atau lebih, akan diperoleh graf baru.

Definisi 3 [4]

Diberikan graf G dan H adalah dua graf terhubung. Misalkan titik x adalah titik di graf H. Hasil kali *comb* dari G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada G dan menggandakan H sebanyak $|V(G)|$ dan mencangkokkan penggandaan graf H ke- i di titik x ke titik ke-i dari graf G.

Berikut ini contoh graf $P_3 \rhd C_5$



Gambar 1 (a) Graf C_5; (b) Graf P_3; (c) Graf $P_3 \rhd C_5$

Hasil dan Pembahasan

Graf hasil kali comb dari suatu graf P_m dengan graf C_5, dinotasikan dengan $P_m \rhd C_5$ adalah suatu graf yang didapatkan dengan melakukan penggandaan graf C_5 sebanyak n, lalu dihubungkan dengan mencangkokkan dari n-titik graf C_5 ke-i di titik m ke titik ke-i dari graf P_m. Banyaknya titik dan sisi pada graf $P_m \rhd C_5$ masing-masing adalah $\left|V(P_m \rhd C_5)\right| = 5m$ dan $\left|E(P_m \rhd C_5)\right| = 6m - 1$. Sebelum kita membahas lebih dalam tentang nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \rhd C_5$, yang dinotasikan dengan $tvs(P_m \rhd C_5)$, untuk$m \geq 3$dan m bilangan ganjil, terlebih dahulu kita tentukan aturan pemberian nama titik dan sisi pada graf $P_m \rhd C_5$ yaitu :

a. Pemberian nama titik-titik pada graf P_m

   Beri nama titik-titik ke-$\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-3}{2}, \frac{m-5}{2}, \ldots, 2, \frac{m+3}{2}, \frac{m+5}{2}, \frac{m+5}{2}, \ldots, m, 1$ pada graf P_m secara berurut dengan nama $x_1, x_2, x_3, , \ldots, x_m$.

b. Pemberian nama titik-titik pada graf C_5

   Titik-titik pada graf C_5 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$ secara berurut diberi nama $y_i{}^k$ dengan k dimulai dari 1 sampai 4 dengan arah berlawanan jarum jam. Sedangkan titik-titik pada graf C_5 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \frac{m+5}{2}, \ldots, m$ secara berurut diberi nama $y_i{}^k$ dengan k dimulai dari 1 sampai 4 yang arahnya searah jarum jam.

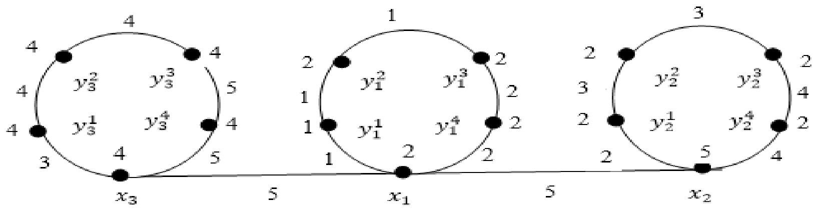
Nilai total ketakteraturan titik pada graf $P_m \rhd C_5$, dinotasikan dengan $tvs(P_m \rhd C_5)$, untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 4 Untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil berlaku $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Bukti :
Pertama-tama, akan dibuktikan $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Biasanya hal ini dibuktikan menggunakan Teorema 2, namun teorema ini tidak akan dibuktikan dengan teorema tersebut, karena dibutuhkan batas bawah yang lebih ketat. Perhatikan bahwa derajat titik terkecil dari graf $P_m \rhd C_5$ adalah 2 dan jumlah titik yang berderajat dua pada $P_m \rhd C_5$ adalah $4m$. Agar mendapatkan pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 kita beri label yang dimulai dari $3, 4, 5, \ldots, 2m+2$. Sementara bobot titik graf $P_m \rhd C_5$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang saling terhubung dengan titik tersebut. Oleh sebab itu,kita peroleh label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\lceil \frac{4m+2}{3} \rceil$ dan tidak mungkin lebih kecil dari $\lceil \frac{4m+2}{3} \rceil$. Jadi, kita dapatkan untuk $tvs(P_m \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \leq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.
Misalkan himpunan titik dari graf $P_m \rhd C_5$ adalah:
$V(P_m \rhd C_5) = \{x_i, {y_i}^k \mid 1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq k \leq 4\}$,
dan himpunan sisi dari graf $P_m \rhd C_5$ adalah:
$E(P_m \rhd C_5) = \{x_i {y_i}^k \mid 1 \leq i \leq m$ dan $k = 1{,}4\} \cup \{{y_i}^k {y_i}^{k+1} \mid 1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq k \leq 3\} \cup \left\{x_i x_{i+1} \middle| 1 \leq i \leq \frac{m-3}{2}\right.$ atau $\left.\frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2\right\} \cup \{x_1 x_{\frac{m+1}{2}}\} \cup \{x_{\frac{m-1}{2}} x_m\}$.
Berikut akan ditunjukkan adanya pelabelan$-r_i$ total tak teratur titik pada graf $P_m \rhd C_5$ dengan $r_i = \left\lceil \frac{4i+2}{3} \right\rceil$untuk $1 \leq i \leq m$:

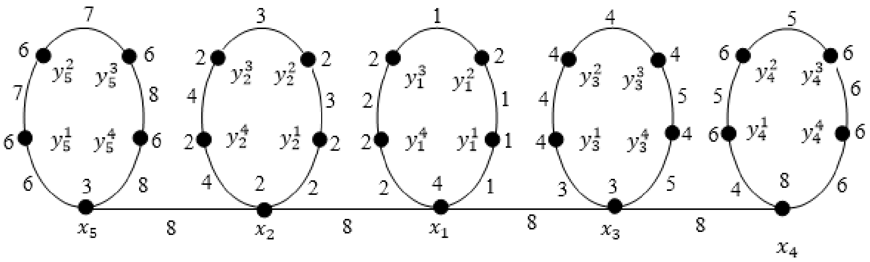
a) Untuk $m = 3$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542



Gambar 2 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_3 \rhd C_5$

b) Untuk $m = 5$



Gambar 3 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_5 \rhd C_5$

c) Untuk $m \geq 7$

Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 4m - 2r_m & ; \text{jika } i = 1 \\ 4m + i - 2r_i - 2r_m + 4 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-1}{2} \\ \frac{9m+8}{2} - 3r_m & ; \text{jika } i = m \\ 4m + i - 2r_m - 2r_i + 6 & ; \text{jika } \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{9m}{2} + 5 - 2r_{m-1} - r_m & ; \text{jika } i = m-1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda(y_i^k) = \begin{cases} 1 & ; \text{ jika } i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{ jika } i = 1 \text{ dan } 2 \leq k \leq 4 \\ r_i - 1 & ; \text{ jika } 3 \leq i \leq m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \\ r_i - 2 & ; \text{ jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \\ r_i & ; \text{ jika } 4 \leq i \leq m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \end{cases} \quad (2)$$

Pelabelan sisinya adalah :

$$\lambda(x_i {y_i}^k) = \begin{cases} i & ; \text{ jika } i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ r_i - 2 & ; \text{ jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{ jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda({y_i}^k {y_i}^{k+1}) = \begin{cases} r_i - 1 & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 3 \leq k \leq 4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = r_m \quad ; \text{jika} 1 \leq i \leq \frac{m-3}{2} \text{atau} \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \quad (5)$$

$$\lambda\left(x_1 x_{\frac{m+1}{2}}\right) = r_m \quad (6)$$

$$\lambda\left(x_{\frac{m-1}{2}} x_m\right) = r_m \quad (7)$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542
Berdasarkan rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi tersebut, dapat kita peroleh rumus bobot untuk setiap titik pada graf $P_m \rhd C_5$ dan memiliki bobot yang berbeda. Sehingga kita peroleh $wt(x_i)$ yaitu:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 4m+3 & ; jika\ i = 1 \\ 4m+i+2 & ; jika\ 2 \le i \le \frac{m-3}{2} \\ 4m+i+4 & ; jika\ \frac{m+3}{2} \le i \le m-2 \\ \frac{9m+3}{2} & ; jika\ i = \frac{m-1}{2} \\ \frac{9m+9}{2} & ; jika\ i = \frac{m+1}{2} \\ \frac{9m}{2}+3 & ; jika\ i = m-1 \\ \frac{9m}{2}+2 & ; jika\ i = m. \end{cases} \quad (8)$$

Sedangkan $wt\left(y_i{}^k\right)$ adalah:

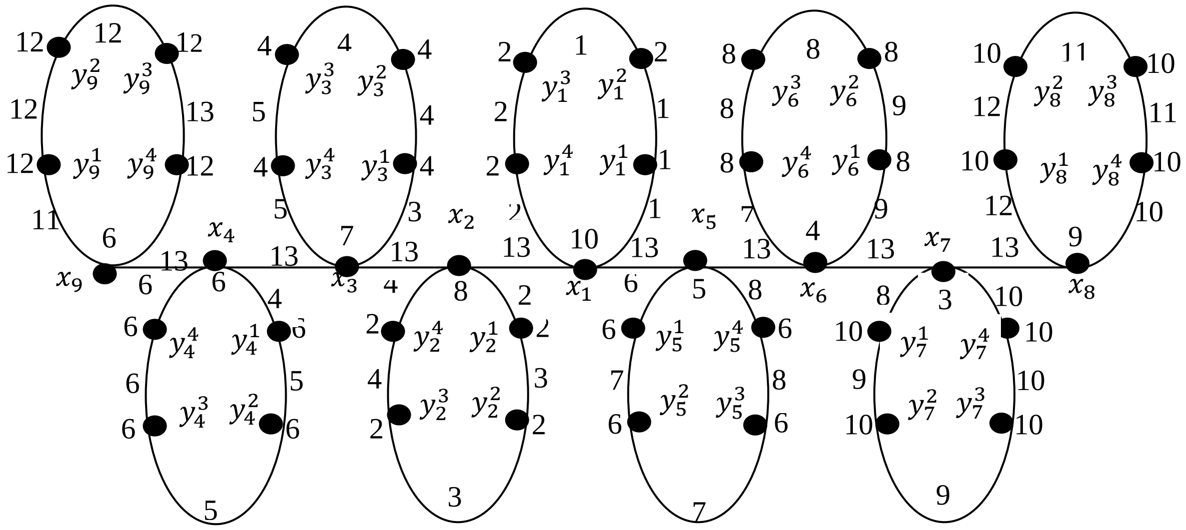
$$wt\left(y_i{}^k\right) = \begin{cases} 3 & ; jika\ i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 2 \\ 4i+1 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 4 \\ 4i-1 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 1 \\ 4i-1 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 2 \\ 4i+1 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 4 \\ 4i-2 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 2 \\ 4i+1 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ; jika\ 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 4 \end{cases} \quad (9)$$

Perhatikan bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari $\{V(P_m \rhd C_n) \cup E(P_m \rhd C_n)$ ke $\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil\}$. Bobot titik dari graf $P_m \rhd C_5$ pada $wt\left(y_i{}^k\right)$ adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $4m+2$. Sedangkan pada $wt(x_i)$ yaitu bilangan bulat positif berurut yang dimulai dari $4m+3$ sampai ke $5m+2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total takteratur titik dari graf $P_m \rhd C_5$ memiliki bobot yang berbeda. Berdasarkan Definisi 1, pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total takteratur titik. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \le \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Telah kita dapatkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \le \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(P_m \rhd C_5) \ge \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$, maka dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. ■

Sebagai ilustrasi dari Teorema di atas, diberikan contoh pelabelan total tak teratur titik untuk graf $P_9 \rhd C_5$ dengan $tvs(P_9 \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4(9)+2}{3} \right\rceil = 13$.

Dengan menggunakan rumus λ pada Persamaan (1) s.d. (7), diperoleh pelabelan untuk $P_9 \rhd C_5$ sebagai berikut :



Gambar 4 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_9 \rhd C_5$

Label terbesar yang digunakan adalah 13 dan bisa diperiksa bahwa pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda., dimana:

$wt({y_1}^1) = \lambda(y_1^1) + \lambda(x_1y_1^1) + \lambda(y_1^1y_1^2) = 1 + 1 + 1 = 3.$

$wt({y_1}^2) = \lambda(y_1^2) + \lambda(y_1^1y_1^2) + \lambda(y_1^2y_1^3) = 2 + 1 + 1 = 4.$

$wt({y_1}^3) = \lambda(y_1^3) + \lambda(y_1^2y_1^3) + \lambda(y_1^3y_1^4) = 2 + 1 + 2 = 5.$

$wt({y_1}^4) = \lambda(y_1^4) + \lambda(x_1y_1^4) + \lambda(y_1^3y_1^4) = 2 + 2 + 2 = 6.$

$wt({y_2}^1) = \lambda(y_2^1) + \lambda(x_2y_2^1) + \lambda(y_2^1y_2^2) = 2 + 2 + 3 = 7.$

$wt({y_2}^2) = \lambda(y_2^2) + \lambda(y_2^1y_2^2) + \lambda(y_2^2y_2^3) = 2 + 3 + 3 = 8.$

$wt({y_2}^3) = \lambda(y_2^3) + \lambda(y_2^2y_2^3) + \lambda(y_2^3y_2^4) = 2 + 3 + 4 = 9.$

$wt({y_2}^4) = \lambda(y_2^4) + \lambda(x_2y_2^4) + \lambda(y_2^3y_2^4) = 2 + 4 + 4 = 10.$

$wt({y_3}^1) = \lambda(y_3^1) + \lambda(x_3y_3^1) + \lambda(y_3^1y_3^2) = 4 + 3 + 4 = 11.$

$wt({y_3}^2) = \lambda(y_3^2) + \lambda(y_3^1y_3^2) + \lambda(y_3^2y_3^3) = 4 + 4 + 4 = 12.$

$wt({y_3}^3) = \lambda(y_3^3) + \lambda(y_3^2y_3^3) + \lambda(y_3^3y_3^4) = 4 + 4 + 5 = 13.$

$wt({y_3}^4) = \lambda(y_3^4) + \lambda(x_3y_3^4) + \lambda(y_3^3y_3^4) = 4 + 5 + 5 = 14.$

$wt({y_4}^1) = \lambda(y_4^1) + \lambda(x_4y_4^1) + \lambda(y_4^1y_4^2) = 4 + 6 + 5 = 15.$

$wt({y_4}^2) = \lambda(y_4^2) + \lambda(y_4^1y_4^2) + \lambda(y_4^2y_4^3) = 5 + 6 + 5 = 16.$

$wt({y_4}^3) = \lambda(y_4^3) + \lambda(y_4^2y_4^3) + \lambda(y_4^3y_4^4) = 5 + 6 + 6 = 17.$

$wt({y_4}^4) = \lambda(y_4^4) + \lambda(x_4y_4^4) + \lambda(y_4^3y_4^4) = 6 + 6 + 6 = 18.$

$wt({y_5}^1) = \lambda(y_5^1) + \lambda(x_5y_5^1) + \lambda(y_5^1y_5^2) = 6 + 6 + 7 = 19.$

$wt({y_5}^2) = \lambda(y_5^2) + \lambda(y_5^1y_5^2) + \lambda(y_5^2y_5^3) = 6 + 7 + 7 = 20.$

$wt({y_5}^3) = \lambda(y_5^3) + \lambda(y_5^2y_5^3) + \lambda(y_5^3y_5^4) = 6 + 7 + 8 = 21.$

$wt({y_5}^4) = \lambda(y_5^4) + \lambda(x_5y_5^4) + \lambda(y_5^3y_5^4) = 6 + 8 + 8 = 22.$

$wt(y_6{}^1) = \lambda(y_6^1) + \lambda(x_6y_6^1) + \lambda(y_6^1y_6^2) = 8 + 7 + 8 = 23.$

$wt(y_6{}^2) = \lambda(y_6^2) + \lambda(y_6^1y_6^2) + \lambda(y_6^2y_6^3) = 8 + 8 + 8 = 24.$

$wt(y_6{}^3) = \lambda(y_6^3) + \lambda(y_6^2y_6^3) + \lambda(y_6^3y_6^4) = 8 + 8 + 9 = 25.$

$wt(y_6{}^4) = \lambda(y_6^4) + \lambda(x_6y_6^4) + \lambda(y_6^3y_6^4) = 8 + 9 + 9 = 26.$

$wt(y_7{}^1) = \lambda(y_7^1) + \lambda(x_7y_7^1) + \lambda(y_7^1y_7^2) = 10 + 8 + 9 = 27.$

$wt(y_7{}^2) = \lambda(y_7^2) + \lambda(y_7^1y_7^2) + \lambda(y_7^2y_7^3) = 10 + 9 + 9 = 28.$

$wt(y_7{}^3) = \lambda(y_7^3) + \lambda(y_7^2y_7^3) + \lambda(y_7^3y_7^4) = 10 + 9 + 10 = 29.$

$wt(y_7{}^4) = \lambda(y_7^4) + \lambda(x_7y_7^4) + \lambda(y_7^3y_7^4) = 10 + 10 + 10 = 30.$

$wt(y_8{}^1) = \lambda(y_8^1) + \lambda(x_8y_8^1) + \lambda(y_8^1y_8^2) = 10 + 10 + 11 = 31.$

$wt(y_8{}^2) = \lambda(y_8^2) + \lambda(y_8^1y_8^2) + \lambda(y_8^2y_8^3) = 10 + 11 + 11 = 32.$

$wt(y_8{}^3) = \lambda(y_8^3) + \lambda(y_8^2y_8^3) + \lambda(y_8^3y_8^4) = 10 + 11 + 12 = 33.$

$wt(y_8{}^4)) = \lambda(y_8^4) + \lambda(x_8y_8^4) + \lambda(y_8^3y_8^4) = 10 + 12 + 12 = 34.$

$wt(y_9{}^1) = \lambda(y_9^1) + \lambda(x_9y_9^1) + \lambda(y_9^1y_9^2) = 12 + 11 + 12 = 35.$

$wt(y_9{}^2) = \lambda(y_9^2) + \lambda(y_9^1y_9^2) + \lambda(y_9^2y_9^3) = 12 + 12 + 12 = 36.$

$wt(y_9{}^3) = \lambda(y_9^3) + \lambda(y_9^2y_9^3) + \lambda(y_9^3y_9^4) = 12 + 12 + 13 = 37.$

$wt(y_9{}^4) = \lambda(y_9^4) + \lambda(x_9y_9^4) + \lambda(y_9^3y_9^4) = 12 + 13 + 13 = 38.$

$wt(x_1) = \lambda(x_1) + \lambda(x_1y_1^1) + \lambda(x_1y_1^4) + \lambda(x_1x_2) + \lambda(x_1x_5) = 10 + 1 + 2 + 13 + 13 = 39.$

$wt(x_2) = \lambda(x_2) + \lambda(x_2y_2^1) + \lambda(x_2y_2^4) + \lambda(x_1x_2) + \lambda(x_2x_3) = 8 + 2 + 4 + 13 + 13 = 40.$

$wt(x_3) = \lambda(x_3) + \lambda(x_3y_3^1) + \lambda(x_3y_3^4) + \lambda(x_2x_3) + \lambda(x_3x_4) = 7 + 3 + 5 + 13 + 13 = 41.$

$wt(x_4) = \lambda(x_4) + \lambda(x_4y_4^1) + \lambda(x_4y_4^4) + \lambda(x_3x_4) + \lambda(x_4x_9) = 6 + 4 + 6 + 13 + 13 = 42.$

$wt(x_5) = \lambda(x_5) + \lambda(x_5y_5^1) + \lambda(x_5y_5^4) + \lambda(x_1x_5) + \lambda(x_5x_6) = 5 + 6 + 8 + 13 + 13 = 45.$

$wt(x_6) = \lambda(x_6) + \lambda(x_6y_6^1) + \lambda(x_6y_6^4) + \lambda(x_5x_6) + \lambda(x_6x_7) = 4 + 7 + 9 + 13 + 13 = 46.$

$wt(x_7) = \lambda(x_7) + \lambda(x_7y_7^1) + \lambda(x_7y_7^4) + \lambda(x_6x_7) + \lambda(x_7x_8) = 3 + 10 + 12 + 13 + 13 = 47.$

$wt(x_8) = \lambda(x_8) + \lambda(x_8y_8^1) + \lambda(x_8y_8^4) + \lambda(x_7x_8) = 9 + 10 + 12 + 13 = 44.$

$wt(x_9) = \lambda(x_9) + \lambda(x_9y_9^1) + \lambda(x_9y_9^4) + \lambda(x_4x_9) = 6 + 11 + 13 + 13 = 43.$

Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-13 total tak teratur titik pada $P_9 \rhd C_5$.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari makalah ini dapat disimpulkan bahwa terbukti nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf $P_m \rhd C_5$ untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil adalah $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Saran

Makalah ini membahas tentang nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \rhd C_5$ dengan m bilangan ganjil. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan penelitian ini, penulis sarankan untuk melanjutkan pembahasan tentang nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \rhd C_5$ dengan menggunakan m bilangan genap.

Daftar Pustaka

[1] Ahmad A., Baca M., Bashir Y. Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graph. Bull.Math.Soc.Sci.Math.Roumanie 2014;57(2):147-152
[2] Ahmad A., Baskoro E.T., Imran M. Total Vertex Irregularity Strength of Disjoint Union of Helm Graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 2012;32:427-434
[3] Baca M., Jendrol S., Miller M., Ryan J. On Irregular Total Labeling. Discrete Math. 2007;307:1378-1388
[4] Darmaji, Reni Umilasari. 2015. Bilangan Dominasi Pada Graf Hasil Operasi Comb Lintasan Dengan Lintasan, Sikel, Dan Bintang. Prosiding Semnastika. Surabaya. Hal. 48-57
[5] Galian, J. A. 2014. Dynamic Survey of Graph Labeling. Electronic Journal of Combinatorics.Vol.27. Hal.8928
[6] Marcin, dkk. 2009. A New Upper Bound for The Total Vertex Irregularity Strength of Graphs. Discrete Math. Vol. 309. Hal. 6316-6317.
[7] Marcin,dkk. 2012. Total Vertex Irregularity Strength of Forest. Discrete Math. Vol. 312. Hal. 229-237
[8] Mega, dkk. 2014. ‘’Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Bintang’’. Vol. 1. Hal. 1-9.
[9] Nurdin, Baskoro E.T., Salman A.N.M., Gaos N.N. On the Total Vertex Irregularity Strength of Trees. Discrete Math. 2010;310:3043-3048