Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. I, No. 1, Januari 2015
ISSN 2460 - 4542

Cara Lain Menentukan FPB dan KPK

Welly Desriyati[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Mipa, Universitas Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: wellydesriyati@gmail.com

ABSTRAK

Dalam artikel ini penulis memperkenalkan suatu metode mencari Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua buah bilangan untuk siswa tingkat SMP, yang kemudian diperluaskan menentukan FPB tersebut dengan menggunakan algoritma Euclide. Penentuan KPK dan FPB dari lebih dua bilangan juga akan dibahas.

Kata Kunci: algoritma Euclide, FPB, KPK.

ABSTRACT

A method to find the GCD of two integers for junior high school student would be introduced in this article. Later, this method would be expanded to determine the GCD using Euclide algorithm. This article would also discus about how to find the LCM and GCD of more than two integers.

Key words :*Euclide's algorithm, GCD, LCM.*

PENDAHULUAN

Aljabar adalah cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmetika. Dari setiap cabang aljabar muncullah teorema-teorema yang berkaitan dengan pokok pembahasan aljabarnya.

Salah satu materi yang menjadi dasar matematika sekolah adalah bilangan, pemahaman yang baik tentang konsep bilangan akan sangat membantu dalam memahami konsep-konsep yang lain, seperti pada materi FPB dan KPK yang merupakan materi yang diajarkan dari tingkat SD sampai SMP dan akan digunakan pada tingkat selanjutnya.

Konsep faktor, kelipatan, FPB dan KPK di jenjang SD dan SMP sering kali disajikan sangat mendasar, namun tidak secara utuh. Sebagai contoh untuk menentukan FPB dan KPK cenderung menggunakan salah satu cara yaitu konsep pohon faktor (faktorisasi prima) dan tabel, sementara munculnya konsep ini tidak dikaji sehingga metode untuk menentukan FPB dan KPK hanya mengikuti cara-cara yang lazim yang ada di buku teks. Cukup banyak cara lain yang dapat disajikan dari FPB dan KPK. Pada umumnya cara yang sudah ada di beberapa buku-buku SMP seperti M.Cholik Adinawan dan Sugijono, menentukan FPB dan KPK dengan menggunakan pohon faktor (faktorisasi prima) dan tabel.

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB), diperoleh dari hasil kali faktor-faktor prima yang sama dengan pangkat terkecil [1]. FPB dari beberapa bilangan adalah faktor persekutuan yang paling besar diantara faktor - faktor persekutuan yang ada dari bilangan yang diketahui [6].

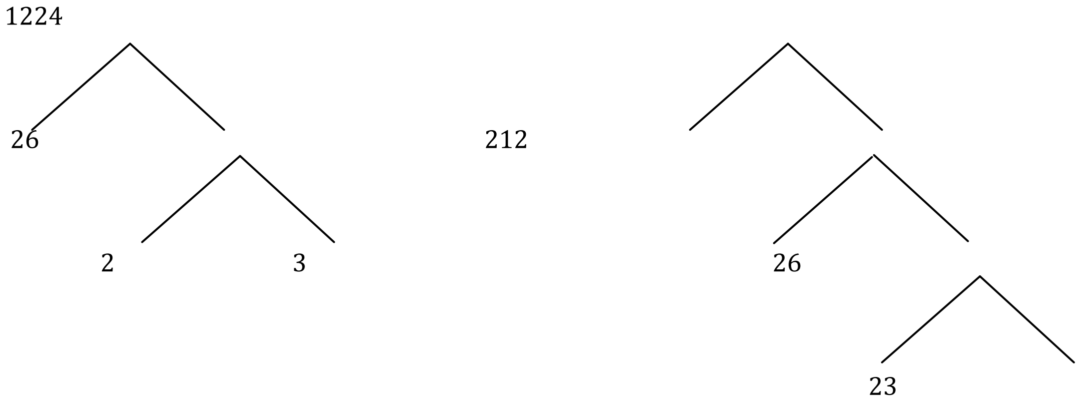
Sedangkan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK), diperoleh dari hasil kali faktor-faktor prima yang berbeda dengan mengambil pangkat tertinggi [1]. KPK dari dua bilangan adalah kelipatan persekutuan yang paling kecil diantara kelipatan-kelipatan persekutuan yang ada dari dua bilangan yang diketahui [6].

Berdasarkan hal-hal tersebut di atas, maka perlu dicari cara lain menentukan FPB dan KPK untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ada beberapa cara menentukan FPB dan KPK yang dikembangkan di tingkat SD dan SMP diantaranya adalah menggunakan teorema faktor dan kelipatan, dan faktorisasi prima (pohon faktor), belum ada buku-buku ditingkatan ini menggunakan cara yang berbeda. Berikut akan diperkenalkan menentukan FPB dengan cara perluasan algoritma Euclide, mencari kumpulan FPB dari FPB dan dengan cara memperkecil bilangan-bilangan yang ingin dicari FPB-nya. Sementara untuk KPK dengan memanfaatkan operasi himpunan dan metode reduksi.

Sebelum menentukan FPB dengan berbagai cara yang disajikan oleh penulis, maka penulis akan memperkenalkan cara yang lazim yang digunakan untuk menentukan FPB, yaitu dengan menggunakan pohon faktor yang akan dijelaskan sebagai berikut. Sebagai contoh, misalkan akan dicari FPB dari 12 dan 24 dengan menggunakan pohon faktor,diperoleh



$$12 = 2^2 \times 3$$
$$24 = 2^3 \times 3$$

Jadi, FPB dari 12 dan 24 adalah $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$.
Kemudian, dengan menggunakan konsep irisan pada himpunan, maka akan diperoleh sebagai berikut.
$12 = \{1,2,3,4,6,12\}$ dan $24 = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$
Kita misalkan 12 sebagai himpunan A dan 24 sebagai himpunan B, maka diperoleh sebagai berikut.
$A = \{1,2,3,4,6,12\}$
$B = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

Dari himpunan di atas, maka akan dicarikan FPB dari 12 dan 24 dengan memanfaatkan maksimal dari irisan-irisan himpunan, sehingga diperoleh $A \cap B = \{1,2,3,4,6,12\}$. Jadi FPB dari 12 dan 24 adalah 12.

Dari pencarian FPB di atas, diperkenalkan beberapa alternatif FPB yang didasari dengan teorema-teorema berikut.

1. Cara Lain Menentukan FPB dari Lebih Dua Bilangan dengan Mencari Kumpulan FPB dari FPB.

Selain metode pencarian FPB yang lazim digunakan di atas, penulis akan mencoba memberikan cara lain dalam pencarian FPB yaitu dengan mencari kumpulan FPB dari FPB yang dilandasi dengan teorema berikut.

Teorema 1. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah bilangan bulat positif. Maka FPB dari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, dinotasikan $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, adalah
$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \big((a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_n)\big)$.

Misalkan akan dicari FPB $24, 30,$ dan 48. Maka berdasarkan Teorema 1, diperoleh

$$(24, 30, 48) = \big((24, 30), (24, 48)\big)$$

Yaitu

$$(24, 30, 48) = (6, 24)$$

Dari sini, dapat dilihat bahwa

$$(24, 30, 48) = 6$$

Jadi FPB dari 24, 30, dan 48 adalah 6.

Dari contoh di atas, dapat dilihat bahwa mencari FPB dari banyak bilangan, dapat dilakukan dengan cara menetapkan satu bilangan, dan mencari FPB-nya dengan bilangan-bilangan yang lain, sehingga dari sini diperoleh banyaknya bilangan yang ingin dicari FPB-nya akan berkurang satu bilangan.

2. Cara Lain Menentukan FPB dari Lebih Dua Bilangan dengan Cara Memperkecil Bilangan-Bilangan yang ingin dicari FPB-nya.

Berikut adalah cara lain dalam mencari FPB dari banyak bilangan dengan memanfaatkan Teorema 6. Hasil ini ditetapkan pada teorema berikut.

Teorema 2. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah bilangan bulat positif dengan $min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = a_1$,maka $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \big(a_1, a_2 (mod\ a_1), a_3 (mod\ a_1), \dots, a_n (mod\ a_1)\big)$

Bukti. Pada Teorema 1, diperoleh bahwa

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \big((a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_n)\big)$$

Disisi lain,

$$\big(a_1, a_j\big) = \big(a_1, a_j \ mod \ a_1\big)$$

Sehingga diperoleh

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \Big(\big(a_1, a_2(mod \ a_1)\big), \big(a_1, (mod \ a_1)\big), \dots, \big(a_1, a_n(mod \ a_1)\big)\Big)$$

Dan sekali lagi, dengan melihat Teorema 1, maka dperoleh

$$\Big(\big(a_1, a_2(mod \ a_1)\big), \big(a_1, (mod \ a_1)\big), \dots, \big(a_1, a_n(mod \ a_1)\big)\Big)$$
$$= \big(a_1, a_2(mod \ a_1), a_3(mod \ a_1), \dots, a_n(mod \ a_1)\big)$$

Dari sini, maka dapat disimpulkan bahwa

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \big(a_1, a_2(mod \ a_1), a_3(mod \ a_1), \dots, a_n(mod \ a_1)\big) \blacksquare$$

Misalkan akan dicari FPB dari 72, 1116, dan 1206. Maka berdasarkan Teorema 7 diperoleh bahwa

$$(72{,}1116{,}1206) = (72{,}36{,}54) = (36{,}72{,}54) = (36{,}0{,}18) = (18{,}0{,}36) = (18{,}0{,}0) = 18$$

Jadi $(72{,}1116{,}1206) = 18$.

Cara lain pada subbab ini cukup cerdas, yaitu dengan mengecilkan terus-menerus bilangan-bilangan yang ingin dicari FPB-nya. Dengan mengecilnya bilangan-bilangan tersebut, maka pada akhirnya FPB akan mudah diidentifikasi.

3. Cara Lain Menentukan KPK dari Dua Bilangan dengan Memanfaatkan Operasi Himpunan.

Pada bagian ini, akan dijelaskan tentang metoda pencarian KPK dari dua buah bilangan dengan memanfaatkan operasi himpunan.

Misalkan A adalah himpunan semua faktor-faktor prima dari 105 dan B adalah himpunan semua faktor prima dari 207. Maka diperoleh bahwa $A = \{3,5,7\}$ dan $B = \{3,3,23\}$. Berdasarkan sifat himpunan, telah diketahui bahwa

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

Maka, dengan mengamati bahwa perkalian semua himpunan A adalah 105, perkalian semua anggota himpunan B adalah 207, dan perkalian semua anggota himpunan $A \cap B$ adalah $(105{,}207)$, maka dengan mengonversi penjumlahan menjadi operasi kali dan pengurangan sebagai operasi invers dari bagi, maka diperoleh

$$A + B - A \cap B = \frac{105.207}{(105{,}207)} = \frac{21735}{3} = 7245$$

Maka diperoleh $A \cup B = [105{,}207] = 7245$, yaitu KPK dari 105 dan 207. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode pencarian KPK juga bisa dilakukan dengan memanfaatkan operasi himpunan.

4. Cara Lain Menentukan KPK dari Lebih Dua Bilangan dengan Metode Reduksi

Berikut disajikan sebuah metode reduksi untuk pencarian KPK. Metode ini didasari oleh teorema berikut.

Teorema 3. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n$ adalah bilangan bulat, maka KPK dari $a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}$, dan a_n diberikan oleh

$$[a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n] = \big[[a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}], a_n\big]$$

Misalkan akan dicari KPK dari 72, 1116, dan 1206. Maka berdasarkan Teorema 3 diperoleh bahwa

$$[72, 1116, 1206] = \big[[72, 1116], 1206\big]$$

Dengan menggunakan metode faktorisasi atau diagram Venn, dapat dilihat bahwa $[72, 1116] = 4464$. Sehingga diperoleh

$$[72, 1116, 1206] = \big[[72, 1116], 1206\big] = [4464, 1206] = 299088$$

Selanjutnya, dengan sekali lagi menghitung $[4464, 1206]$ dengan metode faktorisasi prima ataupun opeeasi himpunan, maka diperoleh bahwa $[4464, 1206] = 299088$.
Jadi $[72, 1116, 1206] = 299088$.

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari penjelasan di atas, antara lain adalah:

1. Untuk FPB dengan cara mencari kumpulan FPB dari FPB dan mencari FPB dengan memperkecil bilangan-bilangan yang ingin dicari FPB-nya.
2. Sementara untuk KPK dengan memanfaatkan operasi himpunan. Namun, semakin banyak bilangannya, semakin rumit pula perhitungan KPK-nya dikarenakan oleh semakin banyaknya FPB yang harus dihitung untuk semua kombinasi yang mungkin dari bilangan-bilangan tersebut.

Adapun harapan penulis di masa datang, agar dapat dilanjutkan cara lain menentukan FPB dan KPK dengan berbagai cara yang belum pernah ada.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Cholik dan Sugijono, 2006, *Matematika untuk SMP Kelas VII Semester I*, Jakarta, Erlangga.
[2] B. David M, 1980, *Elementary Number Theory,* America,United States of America.
[3] G. Muhsetyo, 1997, *Dasar – Dasar Teori Bilangan,* Universitas Terbuka,Jakarta.
[4] K. Bana, 1992, *Pengantar Teori Bilangan*, ITB, Bandung.
[5] KH. Rosen, 2005, *Elementary Number Theory and it's Aplication,* Fifth Edition, Pearson, Addison Wesley, USA. New York.
[6] Pujiati, 2011, *Pembelajaran Faktor Persekutuan Terbesar dan Kelipatan Persekutuan Terkecil di SD,* Yogyakarta, Program Bermutu.
[7] Sinaga, 2006, *Tampil Berhitung Matematika untuk SD Kelas IV,* Jakarta, Erlangga.
[8] Sukirman, 2006, *Pengantar Teori Bilangan,* Djambatan,Yogyakarta.
[9] Wissam Raji, 1990, *An Introductory Course in Elementary Number Theory,* Dover, New York.