Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, Januari 2015
ISSN 2460 - 4542

Luas Dengan Partisi Segitiga Untuk Fungsi Cekung

Juni Lesti Nengsih[1], Syamsudhuha[2], Leli Deswita[3]
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email :juni.lesti@gmail.com

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas teknik menentukan luas daerah di R^2 yang dibatasi sebuah kurva f dan garis $x = a$ dan $x = b$ dengan menggunakan partisi segitiga, dengan menentukan kurva utama (kurva f) serta memilih titik utama di $(x_{c,}g(x_c))$ dengan $x_c$pada interval $[a,b]$, tekhnik ini diberikan oleh Affaf [1],dengan memberikan formula baru .Namun Affaf belum menjelaskan untuk f seperti apa sehingga formula tersebut berlaku sehingga $h(x)$ akan bertanda sama dalam selang $[a,b]$. Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya diidentifikasi apakah untuk fungsi cekung ke atas / cekung ke bawah akan memenuhi kondisi yang diinginkan, serta sifat-sifat apa saja yang muncul dengan menggunakan formula yang baru.

Kata kunci: Partisi segitiga, titik utama, kurva utama, cekung atas, cekung bawah.

ABSTRACT

In this article discussed techniques determine the extent of the area in R^2 bounded a curve f and the line$x = a$ and $x = b$by using a triangular partition, by specifying the main curve (curve *f*) and choose the main point $(x_{c,}g(x_c))$with $x_c$at intervals $[a,b]$, this technique is given by Affaf [1], to provide a new formula.. But Affaf not explain what that formula is valid so that the same will be marked in the hose. Therefore for further research to identify whether the function is concave upward / downward concave will meet the desired conditions, as well as the properties of anything that comes up with a new formula.
Keywords: Partition triangle, the main point, the main curve, concave up, concave down.

PENDAHULUAN

Luas daerah di R^2 yang dibatasi kurva$f$ yang berada di atas sumbu x atau sebaliknya dengan dibatasi garis $x = a$ dan $x = b$ diperoleh dengan menggunakan partisi persegi sehingga luas daerah ditentukan dengan $\int_a^b f(x)dx$. Affaf dalam *Luas Daerah di R^2 dengan memanfaatkan garis singgung kurva* memberikan teknik baru dalam menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan garis. Yang membedakan teknik luasan yang dilakukan Affaf dengan teknik luasan yang sudah ada, yaitu dalam partisinya, dalam hal ini Affaf menggunakan partisi segitiga. Partisi dijalankan dari kurva (yang selanjutnya disebut kurva utama), bukan dari sumbu-$x$seperti pada teknik yang sudah dikenal sebelumnya, kemudian menentukan satu titik pada garis (selanjutnya disebut titik utama) yang membatasi daerah yang akan ditentukan luasnya.

Pada akhir artikelnya, Affaf memberikan hasil bahwa luas yang dibatasi garis l dan fungsi f yang berpotongan di $x = a$ dan $x = b$ diberikan oleh L, yaitu

$$L = \frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx \text{, jika } h(x) \geq 0$$

dan

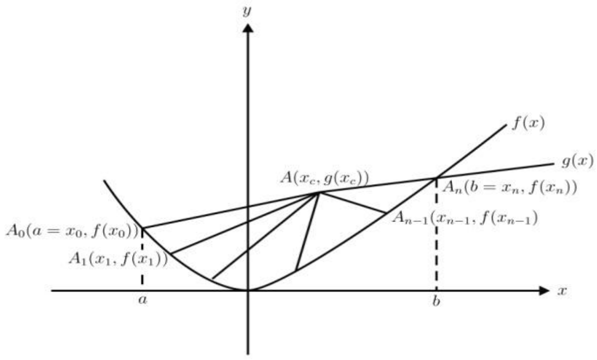
$$L = -\frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx \text{, jika } h(x) \leq 0$$

$\forall x \in [a,b]$ dimana $h(x) = l(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + xf'(x)$, dengan $x_c \in [a,b]$.

Dalam artikelnya, Affaf belum memberikan kriteria untuk f, Affaf belum memberikan gambaran yang jelas, untuk f seperti apa sehingga $h(x)$ bertanda sama dalam selang $[a,b]$. Untuk itu dalam artikel ini, penulis membahas fungsi f yang menyebabkan kondisi $h(x)$ bertanda sama dalam selang $[a,b]$.

METODE PENELITIAN

Misalkan suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $y = g(x)$ merupakan garis. Kurva f dan g berpotongan di absis $x = a$ dan $x = b$ dengan $a < b$. Langkah yang dilakukan dalam membuat partisi segitiga adalah menentukan kurva utama di $y = f(x)$ dan titik $\left(x_c, g(x_c)\right)$ sebagai titik utama di $y = g(x)$ dimana $x_c \in [a, b]$. Kemudian partisi dijalankan pada kurva utama dengan menghubungkan dua titik yang berdekatan, seperti Gambar 1.



Gambar 1: Daerah Dipartisi Menggunakan Segitiga

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa partisinya merupakan segitiga sebarang. Namun, jika partisinya diperkecil akan menghasilkan segitiga samakaki. Misalkan L_i menyatakan luas $\Delta A_{i-1}AA_i$, maka alas w adalah jarak titik $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ ke $\left(x_i, f(x_i)\right)$, yang diberikan oleh $w = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$ dan tinggi t adalah jarak titik $\left(x_c, g(x_c)\right)$ ke garis yang memuat titik $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ dan $\left(x_i, f(x_i)\right)$. Jika n partisi mendekati tak hingga maka luas yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ adalah

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i \quad (1)$$

Persamaan garis yang melalui titik $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ dan $\left(x_i, f(x_i)\right)$ diberikan oleh $y - f(x_i) - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}x + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}x_i = 0$

Berdasarkan Teorema 5. Diberikan$A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, dan $C(x_c, y_c)$. Misal $x_b > x_a$, Maka luas segitiga ABC diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}|y_c - y_i - mx_c + mx_i|(x_b - x_a)$$

maka L_i adalah

$$L_i = \frac{1}{2}\left|g(x_c) - f(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}x_c + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}x_i\right|(x_i - x_{i-1})$$

Jika $n \to \infty$ maka $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0$. Sedemikian hingga $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = f'(x_i)$. Maka

$$L_i = \frac{1}{2}|g(x_c) - f(x_i) - f'(x_i)x_c + f'(x_i)x_i|\Delta x_i \quad (2)$$

Berdasarkan jumlah Riemann, maka persamaan (2) dapat disederhanakan menjadi

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}|g(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + xf'(x)|dx \quad (3)$$

Misalkan $h(x) = g(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + xf'(x)$, maka persamaan (3) dapat disederhanakan menjadi

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}|h(x)|dx (4)$$

Karena yang diinginkan adalah $h(x) \geq 0$, maka persamaan (4) dapat ditulis dengan

$$L = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} h(x)dx \ (5)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi Cekung ke atas / ke bawah

Definisi 1.Kecekungan [3, h.185]: Diberikan fungsi f kontinu dalam selang $[a, b]$. Fungsi f dikatakan :

(i) Cekung ke atas jika dan hanya jika $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$dengan$x_1 > x_2$berlaku $f'(x_1) > f'(x_2)$.
(ii) Cekung ke bawah jika dan hanya jika $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$dengan$x_1 > x_2$berlaku $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Teorema 2. Diberikan fungsi f kontinu dalam $[a,b]$, maka:
(i) Jika f cekung ke atas , maka $\forall x_0 \in [a,b]$ berlaku $\left(x, f(x)\right) > l$; $\forall x \in [a,b]$; $x \neq x_0$ dengan $m_l = f'(x_0)$.
(ii) Jika f cekung ke bawah , maka $\forall x_0 \in [a,b]$ berlaku $\left(x, f(x)\right) < l$; $\forall x \in [a,b] x \neq x_0$ dan $m_l = f'(x_0)$.

Bukti :Untuk membuktikan Teorema 2, dibutuh teorema nilai rata-rata (TNR)

Teorema TNR. Diberikan f fungsi kontinu dalam $[a,b]$, maka $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \exists x_0 \in [a,b]$ dengan $x_1 < x_0 < x_2 \ni f'(x_0) = \frac{fx_1 - fx_2}{x_1 - x_2}$.
(i) Andaikan $\exists x \in [a,b]; x \neq x_0 \ni \left(x, f(x)\right) \leq l$, tetapi f cekung ke atas pada selang $[a,b]$. Maka terdapat $\left(x', f(x')\right) \in f$ dengan $x \neq x_0$; katakan juga $x' > x_0$ sehingga $\left(x', f(x')\right) \in l$; akibatnya $m_l = \frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'}$. Berdasarkan teorema nilai rata-rata terdapat $x_0 < x" < x'$ sehingga $f'(x") = \frac{f(x_0) - f(x')}{x - x'} = m_l = f'(x_0)$. Hal ini kontradiksi dengan $f$cekung ke atas, yaitu $f^{'}(x") = f'(x_0)$ padahal $x_0 < x"$. Jadi, haruslah untuk setiap x anggota $[a,b]$ berlaku titik $\left(x, f(x)\right)$ selalu lebih besar dari l. Atau secara matematis, haruslah $\forall x \in [a,b]; x \neq x_0$ berlaku $\left(x, f(x)\right) > l$.
(ii) Dengan cara yang sama teorema (ii) dapat dibuktikan.

Teorema 3.
Diberikan fungsi $f$kontinu pada $[a,b]$ dan garis g. Maka:
(i) Jika $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \in [a,b]$ dimana $f(x) = g(x)$ berlaku di $a = x = b$ dan $f$cekung ke atas dalam selang $[a,b]$, maka luas yang dibatasi oleh f dan g diberikan oleh L, yaitu:L $= \frac{1}{2}\int_a^b y_a -$ *ƒx−xaf'x+xf'xdx*. Untuk *xa,ya∈g* dengan *xa∈a,b*
(ii) $f(x) \geq g(x)$; $\forall x \in [a,b]$ dimana $f(x) = g(x)$ berlaku di $a = x = b$ dan $f$cekung ke bawah dalam selang $[a,b]$ maka luas yang dibatasi oleh f dan g diberikan oleh L, yaitu: L $= -\frac{1}{2}\int_a^b f(x) - y_a +$ *xaf'x−xf'xdx*. Untuk *xa,ya∈g* dengan *xa∈a,b*

Bukti:
(i) Ambil $(x_a, y_a) \in g$ dengan $x_a \in [a,b]$dan $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \in f$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Kemudian, kita bentuk $\Delta A_0 A A_1$,$\Delta A_1 A A_2$, … , $\Delta A_{n-1} A A_n$. Maka, untuk suatu $\Delta A_{i-1} A A_i$; $1 \leq i \leq n$, luas $\Delta A_{i-1} A A_i$ diberikan oleh

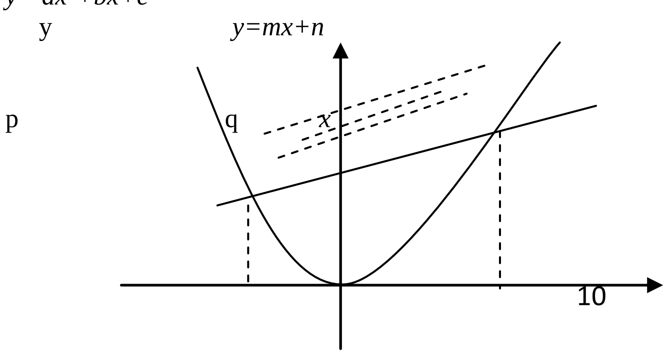
$$L_{\Delta A_{i-1} A A_i} = \frac{1}{2}\left| y_a - f(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x_a + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x_i \right| (x_i - x_{i-1})$$

Jika $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \to 0$, maka diperoleh

$$L_{\Delta A_{i-1} A A_i} = \frac{1}{2}\left| y_a - f(x_i) - f'(x_i) x_a + f'(x_i) x_i \right| \Delta_i$$

Berdasarkan Teorema 5, diperoleh bahwa L $= \frac{1}{2}\int_a^b y_a - f(x) - x_a f^{'}(x) + x f^{'}(x) dx$

(ii) Dengan cara yang sama teorema (ii) dapat dibuktikan
Penerapan dalam Menentukan Luas
1. Fungsi Kuadrat
$y = ax^2 + bx + c$



Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, Januari 2015
ISSN 2460 - 4542

Misalkan a = p dan b = f(p). Maka luas daerah yang diarsir berdasarkan teorema 3 adalah

$$L = \frac{1}{2}.\int_p^q \mathrm{f}(\mathrm{p}) - f(x) - p.f'(x) + x.f'(x)d(x)$$

dengan $f(p)= a_i p^2 + b_i p + c$, $f(x) = a_i x^2 + b_i x + c$ dan $f'(x) = 2a_i x + b_i$ maka:

$$\text{Luas daerah arsiran} = \frac{1}{2}.\int_p^q f_{(p)} - f(x) - p.f'(x) + x.f'(x)d(x)$$

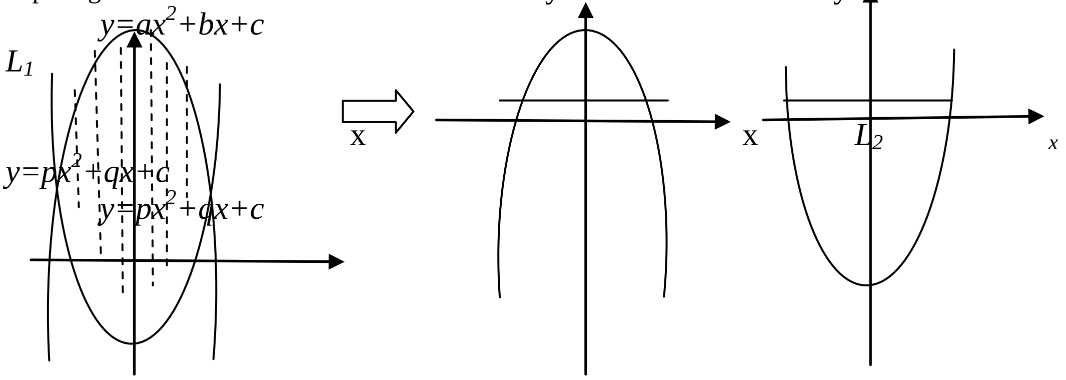
$$= \frac{1}{2}.\int_p^q (a_i.p^2 + b_{i.}p + c) - (a_i.x^2 + b_i.x + c) - p.(2.a_i.x + b_i) + x.(2.a_i.x + b_i)dx$$

$$= \frac{1}{6}.a_i.(p-q)^3$$

Maka untuk sebarang fungsi kuadrat dapat ditentukan

$$L = \frac{1}{6}.a_i.(p-q)^3 \quad (6)$$

Seperti gambar berikut :



Berdasarkan persamaan (6) diperoleh

$L_1 = \frac{1}{6}.|p_i|.(p-q)^3$ dan $L_2 = \frac{1}{6}.|a_i|.(p-q)^3$

Luas daerah yang diarsir $= \frac{1}{6}.(p-q)^3.(|p_i| + |a_i|)$

Sehingga $L_1 : L_2 = |p_i| : |a_i|$

Dengan demikian diperoleh bahwa perbandingan L_1 dan L_2 adalah perbandingan masing-masing harga mutlak dari koefisien x^2dari dua kurva yang membatasi daerah tersebut.

Dari uraian penerapan pada fungsi kuadrat tersebut, dapat dilihat bahwa luas daerah yang dibatasi oleh dua buah kurva cekung, baik keduanya cekung ke atas maupun keduanya cekung ke bawah dalam selang titik potongnya, atau pun yang satu cekung ke atas dan yang satu cekung ke bawah dalam selang titik potongnya, teknik luasan dengan partisi segitiga juga dapat digunakan.

KESIMPULAN

Dari uraian di atas penulis menyimpulkan bahwa $h(x) \geq 0$ pada selang $[a,b]$apabila f merupakan cekung atas, sebaliknya $h(x) \leq 0$ pada selang $[a,b]$apabila f merupakan cekung bawah, dengan sifat bahwa luas daerah yang dibatasi ditentukan oleh koefisien x^2.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih setingginya kepada :

1. Bapak Dr.Syamsudhuha,M.Sc dan Ibu Dr. Leli Deswita, M.Si selaku pembimbing I dan pembimbing II, yang telah meluangkan wakunya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan.

2. Bapak / Ibu dosen yang tidak dapat disebutkan satu persatu, semoga selalu diberikan kesehatan dan ilmu yang diberikan menjadi amal Jariyah.
3. Ayahanda H. Husni Hasan (Alm) dan Ibunda Hj. Marlis serta adik-adik yang telah memberikan dukungan dan motivasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Affaf,M, *Luas Daerah di R^2 dengan memanfaatkan garis singgung kurva*, Prosiding, ITB,Bandung,2012
[2] Purcell,E.J, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Penerbit Erlangga, Jakarta,1990
[3] Stewart,J. *Kalkulus, edisi 5*, Terj.dari *Calculus, Fifth Edition*, oleh Chriswan Sungkono Penerbit Salemba Teknika, Jakarta, 2009.